

# ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE, 1929, BAND 1, HEFT 5

**Messung des Intensitätsverhältnisses zweier  
vom gleichen Ausgangszustand emittierten Linien  
(1S—3P und 2S—3P) beim Natriumatom, im Hin-  
blick auf das Verhältnis der korrespondierenden  
Übergangswahrscheinlichkeiten**

**Von Carlfriedrich Weiss**

(Gekürzte Breslauer Dissertation)

(Mit 18 Figuren)

Inhaltsübersicht. § 1. Fragestellung. — I. Die Untersuchungsmethode: § 2. Gesichtspunkte für die Wahl der Untersuchungsmethode; § 3. Lichtquelle und Strahlungsempfänger; § 4. Die energetische Methode; § 5. Die photographisch-photometrische Methode; § 6. Auswahl der Vergleichslinie. — II. Gleichzeitige energetische und photographisch-photometrische Messungen: § 7. Die Versuchsanordnung; § 8. Relative Messungen, bezogen auf ein Nernstfadenspektrum; § 9. Absolute Messung durch Eichung am schwarzen Körper. — III. Bestimmung der Selbstabsorption mit Hilfe der Linienabsorption: § 10. Grundlagen der Methode; § 11. Ausführung der  $k$ -Messungen. — IV. Ausrechnung des Intensitätsverhältnisses, Diskussion des Ergebnisses.

§ 1. *Fragestellung.* Nach der Bohr-Einsteinschen Quantentheorie ist die Intensität einer beim spontanen Übergang des Atoms aus dem Zustand  $k$  nach dem Zustand  $i$  ausgestrahlten Spektrallinie gegeben zu

$$J_{\nu_{ki}} = N_k \cdot a_{ki} \cdot h \cdot \nu_{ki};$$

dabei bedeutet  $N_k$  die Zahl der Atome im Zustand  $k$ ,  $h$  das Plancksche Wirkungsquantum und  $\nu_{ki}$  die Frequenz der emittierten Linie. Die Größe  $a_{ki}$  ist die von Einstein (1917) analog einer radioaktiven Zerfallswahrscheinlichkeit definierte spontane Übergangswahrscheinlichkeit (Ü.-W.). Die mit dieser Festsetzung verbundene statistische Auffassung vom Wesen des Emissionsprozesses wird heute als endgültig postuliert. Um den Absolutwert der Ü.-W. aus der *Emission* experimentell zu bestimmen, müßte  $J$ , die Strahlungsintensität in absoluten

Einheiten gemessen und  $N_k$ , die Zahl der Atome im Zustand  $k$ , bestimmt werden. Gerade diese letzte Größe ist aber nur in sehr vereinfachten Fällen der Messung zugänglich. Auf der anderen Seite besteht die Möglichkeit, die Linien in *Absorption* zu messen. Analog der Emission wird nämlich auch die Absorption vom Zustand  $i$  in den Zustand  $k$  durch die induzierte Ü.-W.  $b_{ik}$  bestimmt, die mit  $a_{ki}$  in einem einfachen, durch Konstanten vermittelten Zusammenhange steht. Handelt es sich nun um Linien, die vom Grundzustand aus absorbiert werden können, dann ist bei diesen wohl die für die absolute Bestimmung der Ü.-W. nötige Kenntnis der Zentrenzahl im Grundzustand aus Dampfdruckmessungen zu gewinnen. Für Linien, die nicht vom Grundzustand aus absorbiert werden, sondern von einem höheren Zustand aus, besteht dagegen die gleiche Schwierigkeit der Bestimmung der maßgebenden Zentrenzahl wie bei den Emissionsmessungen.

Betrachtet man nun Linien, die von einem *gemeinsamen* Ausgangszustand emittiert werden, dann ist das *Verhältnis* der ihnen zugeordneten Ü.-W. allein durch das Intensitätsverhältnis bestimmt, denn die Zahl  $N_k$  fällt heraus. Es ist

$$\frac{J_{v_{ki}}}{J_{v_{kj}}} = \frac{a_{ki} \cdot v_{ki}}{a_{kj} \cdot v_{kj}}, \text{ also } \frac{a_{ki}}{a_{kj}} = \frac{J_{v_{ki}} \cdot v_{kj}}{J_{v_{kj}} \cdot v_{ki}}.$$

Befindet sich bei diesen Linien eine, die vom Normalzustand aus absorbiert wird, dann ist nach dem Vorhergesagten der Absolutwert *ihrer* Ü.-W. durch eine Absorptionsmessung feststellbar, mithin sind auf dem Wege über einen Intensitätsvergleich auch die Ü.-W. aller anderen von dem gleichen Zustand ausgehenden Linien absolut bestimmt, also auch die Summe der Ü.-W. der betreffenden Linien, d. h. die Gesamtzerfallswahrscheinlichkeit. Die Durchführung eines derartigen Intensitätsvergleiches war mit der vorliegenden Arbeit als Aufgabe gestellt.

Die Spektren der Alkalien besitzen nächst dem Wasserstoff den einfachsten Aufbau. Deshalb ist es zweckmäßig, zunächst Intensitätsmessungen bei den Alkalien auszuführen. Der erste höhere Term<sup>1)</sup>, von dem aus mehrere (nämlich drei) Über-

1) Von der Multiplizität der Terme ist hier abgesehen worden, schon deshalb, weil sich im vorliegenden Fall eine Trennung mit den vorhandenen experimentellen Mitteln nicht vornehmen ließ.

gänge möglich sind, ist der  $3P$ -Term, und zwar entsprechen ihnen die Linien  $1S-3P$ ,  $2S-3P$  und  $3D-3P$ . Beim Natriumatom hatte Bohr<sup>1)</sup> bereits im Jahre 1920 aus Fluoreszenzstrahlungsversuchen von Strutt<sup>2)</sup> den Schluß gezogen, daß Übergänge von  $3P$  nach  $2S$  sehr viel häufiger stattfinden müßten als solche nach  $1S$ . Daher erschien es interessant und aussichtsreich, die geplanten Versuche zunächst am Na-Dampf auszuführen, um so mehr, als bei ihm die in Frage kommenden Linien nicht in Gebieten starker Wasserdampf- und Kohlensäureabsorption gelegen sind, wie dies bei den anderen Alkalien z. T. der Fall ist. In anderer Beziehung liegen beim Natrium die Verhältnisse allerdings ungünstiger als bei anderen Alkalien, nämlich dadurch, daß die drei zu untersuchenden Linien in sehr weit getrennte Spektralgebiete fallen ( $\lambda = 3302,6 \text{ \AA}$ , bzw.  $\lambda = 22070 \text{ \AA}$ , bzw.  $\lambda = 90850 \text{ \AA}$ ). Daher wurde beabsichtigt, das Verhältnis der Ü.-W. aller drei vom Zustand  $3P$  aus möglichen Linien zu bestimmen. Da durch Absorptionsmessungen in der Hauptserie<sup>3)</sup> der Absolutwert von  $a_{1S-3P}$  bekannt ist, so ließe sich nach einer solchen Bestimmung der Verhältnisse der Ü.-W. die Gesamterfalls-wahrscheinlichkeit des  $3P$ -Zustandes bilden.

Die Fragestellung der Arbeit, die also eine vergleichende Intensitätsmessung fordert, führt mit dieser Forderung zu einer prinzipiellen Schwierigkeit, die sich bei allen Intensitätsmessungen geltend macht, nämlich zur Notwendigkeit der Feststellung des Betrages der Selbstabsorption. In der vorliegenden Arbeit ist der Versuch gemacht worden, im Anschluß an die Intensitätsmessungen eine Methode abzuleiten, die es unter gewissen Bedingungen gestattet, den in der Lichtquelle verschwundenen Betrag der Intensität einer Linie prozentual festzulegen.

### I. Die Untersuchungsmethode

#### § 2. Gesichtspunkte für die Wahl der Untersuchungsmethode.

Von den drei zu vergleichenden Linien fallen zwei ( $\lambda = 2,207 \mu$  und  $\lambda = 9,085 \mu$ ) in das ultrarote, die dritte in das ultraviolette

1) N. Bohr, Ztschr. f. Phys. 2. S. 438. 1920.

2) J. Strutt, Proc. Roy. Soc. (A) 96. S. 292. 1920.

3) R. W. Bevan, Proc. Roy. Soc. 34. S. 209. 1910; 85. S. 58. 1211.

Spektralgebiet ( $\lambda = 0,3303 \mu$ ). Für die Intensitätsmessungen an den ultraroten Linien kam lediglich eine energetische Methode in Betracht. Zu ihrer Durchführung stand ein Spiegelspektrometer nach Rubens mit Silberspiegeln und Wadsworth-einrichtung zur Verfügung. Das geringe Reflexionsvermögen des Silbers am Orte der ultravioletten Linie bei der für den Strahlengang nötigen Anzahl von Spiegelungen an versilberten Flächen (6 Spiegel) machte die energetische Messung an der ultravioletten Linie und somit den *direkten* energetischen Vergleich aller drei Linien unmöglich. Es mußte vielmehr ein Substitutionsverfahren angewandt werden unter Heranziehung einer in einem mittleren Wellenlängengebiet gelegenen Standardlinie, deren Intensität *gleichzeitig* mit den Ultrarotlinien nach energetischer Methode, mit der ultravioletten Linie nach einer spezifischen Ultraviolettmethode, der photographisch-photometrischen, zu vergleichen war.

§ 3. *Lichtquelle und Strahlungsempfänger.* Für die Wahl der Lichtquelle waren die folgenden Gesichtspunkte ausschlaggebend. Bei der vorliegenden Fragestellung ist eine spezifische Form der Anregung nicht gefordert, da die Ü.-W. nicht von der Art der Anregung abhängen. Jede Lichtquelle war prinzipiell brauchbar, sofern sie nur drei Bedingungen erfüllte: Konstanz, ausreichende Intensität der in Frage kommenden Linien und Reproduzierbarkeit von Messung zu Messung. Es zeigte sich, daß die drei Forderungen zusammen sehr schwer zu erfüllen waren. Die Intensitätsfrage war für die ultraviolette Linie nicht von ausschlaggebender Wichtigkeit, denn für die Schwärzung der photographischen Platte ist das Produkt aus Energie  $\times$  Zeit (Belichtung) maßgebend. Dagegen wird bei den energetischen Ultrarotmessungen ein Energiefluß, die pro Zeiteinheit vom Strahlungsempfänger aufgenommene Energie, bestimmt. Daher wurde zunächst die Eignung der verschiedenen Lichtquellen an den ultraroten Linien studiert. Die durch das Spiegelspektrometer monochromatisierte Strahlung wurde energetisch zunächst mit einer Thermosäule (nach Voege) und Panzergalvanometer untersucht. Als erste Lichtquelle wurde nach dem Vorbild von Paschen<sup>1)</sup> ein in Luft

1) F. Paschen, Ann. d. Phys. 27. S. 537. 1908.



brennender Kohlebogen gewählt. Die Kohlen waren durchbohrt und mit Natriumsalzen gefüllt. Der Bogen wurde durch einen Gehilfen in bezug auf Länge und Spannungsabfall konstant gehalten. Eine große Selbstinduktion lag im Stromkreis. Trotzdem war es unmöglich, auf diese Weise Energiekurven der Linien (vgl. S. 574) zu erhalten. Abgesehen von den üblichen Bogenschwankungen findet durch unregelmäßige Verdampfung, Abbrand der Kohlen ein dauerndes Schwanken der Dampfdichte im Bogen statt; allerdings kann man auf diese Weise stärkste Intensitäten momentan erzielen. Die zweite Lichtquelle, deren Eignung untersucht wurde, war eine Vakuumdampflampe nach Newman.<sup>1)</sup> Es gelang wohl, die Bedingungen aufzufinden, unter denen die Lampe konstant und gleichmäßig brannte, aber die Intensität der ultraroten Linien war für eine energetische Messung nicht ausreichend. Des weiteren wurden Knallgasflammen verwendet. Solche lassen sich sehr leicht konstant und reproduzierbar halten in bezug auf Form und Temperatur. Ebenso läßt sich in solchen Lichtquellen eine gleichmäßige Färbung erzielen, wenn man ihnen eine wäßrige Lösung eines Salzes des in Frage kommenden Metalls mittels eines Zerstäubers fein zersprüht zuführt. Leider gaben derart gefärbte Flammen, die sich ja für das sichtbare und ultraviolette Spektralgebiet als hervorragend brauchbar bewährt haben, infolge der geringen Dichte des in ihnen leuchtenden Dampfes nicht einmal genügend Energie für einen Nachweis der ultraroten Linien. Stark gefärbte Flammen mit besonders großer Schichtdicke und direkt hineingeblasenem festen Salzaustaub lieferten zwar genügend Strahlungsintensität; doch war diese inkonstant, da es sich nicht ermöglichen ließ, die starke Färbung längere Zeit hindurch gleichmäßig aufrecht zu erhalten. Immerhin konnten mit ihnen durch Mittelungsbildung die ersten Energiekurven gewonnen werden. Die an den genannten Lichtquellen gemachten Erfahrungen wiesen den folgenden Weg, der auch zum Ziel führte: relativ geringe, aber konstante Zentrenzahl in der Lichtquelle zu erzeugen und dafür die Empfindlichkeit der Apparatur stark heraufzusetzen. Da eine wesentliche Empfindlichkeitssteigerung bei

---

1) F. H. Newman, *Phil. Mag.* 44. S. 944. 1922.

der verwandten Anordnung selbst durch Einsetzen eines leichteren Gehänges in das Panzergalvanometer nicht zu erhoffen war, kam nur noch die Verwendung eines Mikroradiometers in Frage.

Das im Institut vorhandene Instrument älterer Bauart wurde durch Einbau eines neuen Strahlungskonus und Verwendung eines besonders leichten Systems bis zur Grenze der Leistungsfähigkeit gebracht. Die Strahlung einer Hefnerlampe ohne Konzentrationsvorrichtung rief einen Ausschlag von 2000 Skt. hervor, bei einem Abstand der Kerze vom Instrument von 4,5 m und einem Skalenabstand von 5 m, während die vorherige Anordnung (Thermosäule und Galvanometer) unter den gleichen Bedingungen nur 60 Skt. ergab. Bei dieser Empfindlichkeit war allerdings die Gleichgewichtslage kaum noch stabil zu nennen, das Instrument war fast aperiodisch. Um quantitativ mit ihm messen zu können, mußte die Empfindlichkeit durch Anbringen eines kleinen magnetischen Nebenschlusses auf die Hälfte verringert werden. Die Schwingungsdauer betrug dann immerhin noch 60 Sek. Außerdem machte auch noch jetzt die Erhaltung der Ruhelage erhebliche Schwierigkeiten. Gegen Luftdruckschwankungen, die unregelmäßige Ausschläge um die Ruhelage hervorrufen, ließ sich das Instrument zwar durch Aufsetzen einer vakuumdichten Haube schützen. Aber von diesem abgesehen begann der Nullpunkt des Instruments zu wandern, solange eine Temperaturänderung im Zimmer vor sich ging. Erst nach eingetretenem Ausgleich kehrte der Spiegel des Gehänges in die Ruhelage zurück. Eine Temperaturänderung von  $0,1^{\circ}$  z. B. hatte zur Folge, daß der Spiegel auf viele Stunden völlig zur Seite gedreht wurde. Einschalten der Skalenlampen, Eintritt einer weiteren Person ins Zimmer, Herumhantieren an der Apparatur, alles das machte nach wenigen Minuten eine Messung illusorisch. Um den Einfluß der Skalenlampen zu beseitigen, mußten diese mindestens 12 Std. vor Beginn einer Messung eingeschaltet werden. Es mußte noch eine Anzahl weiterer Maßnahmen getroffen werden, über die ich nachher berichten werde.

*Wesentliche* Bedeutung gewann dieser Störungseffekt nun bei der Herstellung der Lichtquelle. Sie durfte in keiner Weise das Temperaturgleichgewicht des Zimmers durch Wärmeabgabe

stören. Damit schieden also alle offen brennenden Lichtquellen aus. Als eine geeignete abgeschlossene Lichtquelle erwies sich ein Kohlebogen, der nach dem Vorschlag von Frl. Dr. Kohn in einer Argonatmosphäre unterhalten wird. Ein solcher Bogen bietet gleichzeitig den Vorteil großer Stabilität.<sup>1)</sup> Die Lampen wurden aus Jenenser Geräteglas gefertigt: An einen Kugolkolben von 20 cm Ø wurden 2 Tuben genau rechtwinkelig zueinander angesetzt, derart, daß ihre Achsen sich im Kugelmittelpunkt kreuzten. Durch diese Tuben hindurch konnte gleichzeitig die Strahlungsmessung und die photographische Aufnahme vorgenommen werden; zu diesem Zweck waren sie mit Quarz- bzw. Steinsalzplatten verschlossen. Zwei weitere Ansätze der Kugel, deren gemeinsame Achse senkrecht auf der durch die beiden Tubenachsen gebildeten Ebene stand, dienten zur Aufnahme der Elektrodenhalter. Diese waren federnd auf das Glasgefäß aufgepaßt und erlaubten eine zentrische Justierung der Kohlen. Außerdem befand sich ein Rohrstutzen am Gefäß, um Argon einströmen zu lassen. Der Bogen brannte genau am Orte des Schnittpunktes der Tubenachsen. Die obere Kohle wurde zur Anode gewählt. Als sehr geeignet erwiesen sich Homogenkohlen, die mit einer Lösung von Natriumsalzen getränkt waren.<sup>2)</sup> Sie wurden an den gegenüberstehenden Enden sorgfältig plan gefeilt. Hielt man den Bogen sehr kurz (3 mm), so brannte er in Argon bei einem Spannungsabfall von etwa 27—35 Volt und einer Strombelastung von 16 Amp. äußerst stabil und ruhig. Da aus dem Bogen verdampfendes Salz sich überall im Innern der Lampe niederschlug, mußten die Tuben recht lang gewählt werden, um die klare Durchsichtigkeit der aufgekitteten Verschlußplatten zu erhalten. Ferner wurden die Tuben innen mit einem eng anliegenden, federnden Messingrohr ausgekleidet, mit Blenden versehen, und von außen stark durch Bleirohr mit Wasserzirkulation gekühlt. Auf diese Weise schlug sich der Salzdampf auf dem Messing nieder, und die Verschlußplatten blieben selbst bei andauernder Inbetriebnahme wochenlang klar. Allerdings wurde so der räumliche Winkel, unter dem Licht von der Lampe auf-

1) H. Kohn u. M. Guckel, *Ztschr. f. Phys.* 27. S. 305. 1924.

2) Diese wurden lebenswürdigerweise von den Plania-Werken nach unserem Wunsch angefertigt.

genommen werden konnte, sehr klein. An den Enden der Tuben befanden sich noch kleine elektrische Öfchen, um ein Auf- und Abkitten der Verschlußplatten ohne Gefahr für Platten und Lampe vornehmen zu können. In Anbetracht der hohen

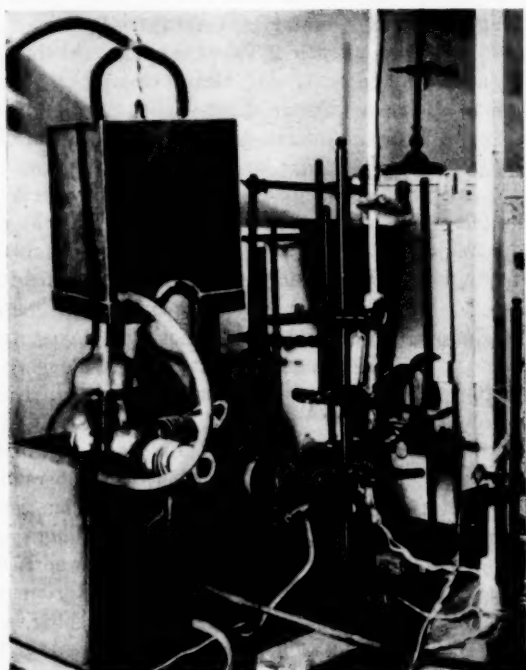


Fig. 1

Temperaturen, denen diese Lampe ausgesetzt wurde, besaß sie eine relativ hohe Lebensdauer. Die Lampe wurde auf einem Asbestring im Innern eines doppelwandigen Messingkühlgehäuses befestigt, das von Wasser durchströmt wurde, und zwar bestand dieser Metallkasten aus zwei selbständigen Teilen, von denen der obere mittels Gegengewicht hochgezogen werden konnte. Die Tuben ragten durch enge Löcher heraus und wurden, wie erwähnt, noch besonders gekühlt. Die Figg. 1

und 2, zeigen die Anordnung bei hochgezogenem Oberteil des Kühlgehäuses, sowie die Lampe allein. Infolge dieser komplizierten Anordnung mußte auf die Anbringung einer Reguliervorrichtung verzichtet werden. Trotzdem blieben in der verwendeten Argonatmosphäre während einer für die Messungen ausreichenden Zeit Bogenlänge und Strahlung (wie sich zeigen wird) genügend konstant. Die Lampen sind an den Elektroden-

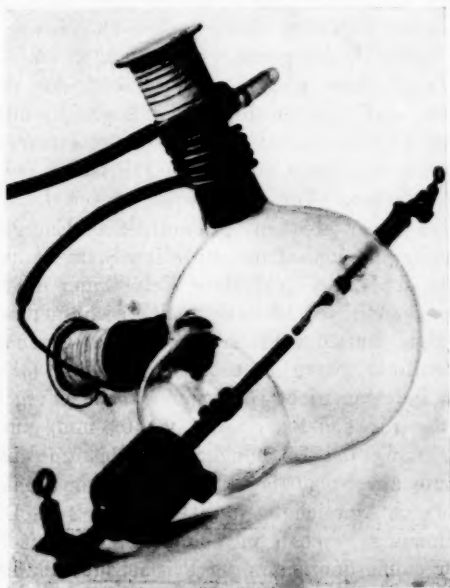


Fig. 2

zuführungen nicht ganz dicht. Man kann nun in zweierlei Weise vorgehen. Entweder wird ein konstanter Argonstrom durchgeblasen; dann bleibt zwar die Bogenlänge konstant, die Intensität nimmt aber ab, weil das Salz aus den glühenden Kohlenspitzen allmählich verdampft, ohne daß diese selbst abbrennen. Füllt man dagegen die Lampe *nur* vor Beginn mit Argon, dann diffundiert nach und nach etwas Luft hinein, und die Kohlen brennen etwas ab. Auf diese Weise erhält man

tatsächlich eine Salznachfuhr und auf etwa 20—30 Min. angenähert konstante Intensität.

§ 4. *Energetische Methode.* Um die Strahlungsenergie einer Linie energetisch zu bestimmen, muß man die Intensität in einem die Linie umgebenden Wellenlängenbereich durchmessen. Man erhält dann eine Energiekurve von ganz bestimmter Form: Infolge der Wadsworth-Einrichtung nämlich wandert die Spektrallinie, die die gleiche Breite wie der Kollimatorschlitz besitzt, bei Prismendrehung über den Okularschlitz hinweg und füllt ihn, wenn beide Schlitze genau gleich sind, in einer scharf bestimmten Lage genau aus. Da alles Licht, das den Okularschlitz erfüllt, auf dem Strahlungsempfänger (in unserem Fall also auf dem Thermoelement des Mikroradiometers) konzentriert wird, so wird in dieser Stellung des Prismas der maximale Ausschlag erhalten. Vor und hinter dieser Lage muß die Energiekurve linear abfallen. Man erhält als Energieverteilung also ein spitzwinkeliges Dreieck; seine Spitze entspricht der Wellenlänge der Linie. Auf diese Weise kann die Lage ultraroter Linien, auch bei breitem Schlitz, recht genau festgelegt werden, sofern nur der Prismendrehwinkel gegen eine sichtbare Spektrallinie genau bestimmt ist. Diese (okulare) Einstellung ist indessen nicht so genau wie die energetische und hatte bei der verwendeten Schlitzbreite (0,3 mm) eine gelegentliche Abweichung des Linienmaximums bis zu einer halben Winkelminute zur Folge (bei Verwendung von Quarzoptik bedeutete das eine Abweichung von  $0,012 \mu$  bei  $2 \mu$ ). Die Wellenlängenbestimmung geschah in üblicher Weise mit Hilfe einer aus dem Brechungsquotienten der Prismensubstanz berechneten Dispersionskurve.

Auch bei Innehaltung der obengenannten Vorsichtsmaßnahmen ließ sich die Nullpunktswanderung des Mikroradiometers nicht ganz beseitigen, denn das Prisma mit der Wadsworth-Einrichtung mußte von Meßpunkt zu Meßpunkt weiter gedreht werden, und dazu war eine Beleuchtung der Ablesevorrichtung nötig, die immer für einen Moment eingeschaltet werden mußte. Da der Gang des Spiegels im Meßinstrument nicht gleichmäßig war und während der 60 Sek. betragenden Schwingungsdauer erheblich variierte, so waren 3—4 Ausschlagsmessungen an einem Punkt der Energiekurve erforderlich. Außerdem mußte

man sich durch wiederholtes Zurückgehen auf bereits gemessene Punkte von der Konstanz der Lichtquelle überzeugen bzw. Inkonstanz durch Mittelungsbildung ausgleichen. Infolge der großen Schwingungsdauer des Mikroradiometers und der zeitlich beschränkten Konstanz der Lichtquelle konnten daher in unmittelbarer Folge höchstens 5 Punkte der Energiekurve einer Linie ausgemessen werden. Die Kurven zeigen aber deutlich die geforderte Dreiecksform.

Die Aufnahme einer solchen Energiekurve war unter günstigen Umständen und bei angespannter Zeitausnützung in etwa 20—25 Min. beendet, d. h. also in der Zeit, in der nach Obigem der Bogen konstant brannte. Es war daher auch nicht möglich, in einer Folge gleichzeitig zwei Linien auszumessen. Abgesehen davon, daß die Bogenintensität nach einer halben Stunde nicht mehr konstant war, zeigte nach dieser Zeit das Mikroradiometer durch allmähliche Erwärmung des Zimmers lebhaftere Nullpunktswanderung und war frühestens 12 Stunden später wieder in meßfähigem Zustand.

Die Fig. 3 zeigt eine in der beschriebenen Weise aufgenommene Energieverteilung. Sie bezieht sich auf das kurzwelligere Glied ( $\lambda = 2,207 \mu$ ). Das langwellige Glied ( $9,085 \mu$ ) war bei den oben (§ 3) erwähnten Messungen wohl konstatiert worden, doch war es bei den Bogenmessungen mit der mir zur Verfügung stehenden Optik vorläufig nicht möglich, Energiekurven der geschilderten Form von dieser Linie zu erhalten. Ich mußte mich daher auf einen Vergleich der Linie 2S—3P mit 1S—3P beschränken.

§ 5. Die photographisch-photometrische Methode. Als photographisch-photometrische Methode wurde die von Dorgelo

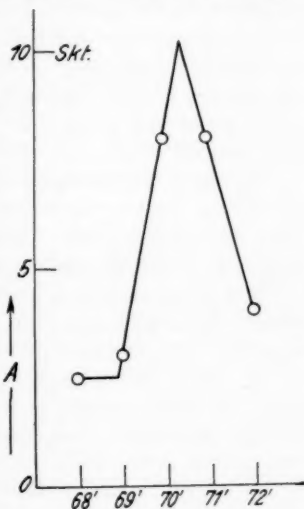


Fig. 3



eingeführte verwandt; die erforderlichen Intensitäts-Schwärzungskurven werden mit Hilfe eines Stufenfilters erzielt, das auf den Spektrographenspalt scharf abgebildet wird.

Für die Stufenerzeugung bei der vorliegenden Arbeit kam nur ein Abschwächer in Frage, der über das Gebiet von 3300—5686 Å<sup>1)</sup> frei von groben Selektivitäten ist, eine Forderung, die von einem sog. Quarzplatinstufenfilter, wie bekannt, gut erfüllt wird. Es handelt sich dabei um ein Quarzplättchen, auf dem eine Anzahl von aneinanderstoßenden Streifen aus Platinstaub mittels Kathodenzerstäubung in stufenförmig ansteigender Dichte niedergeschlagen worden ist. Die Schwächung ist in dem angegebenen Gebiet tatsächlich nicht selektiv, wie eine sorgfältige Eichung an verschiedenen Wellenlängen zeigte. Das Filter<sup>2)</sup> bestand aus 5 Stufen von je 1,6 mm Breite, über der obersten und unter der untersten Stufe ging die Strahlung ungeschwächt hindurch. Die Durchlässigkeiten der Stufen wurden photographisch-photometrisch bestimmt, mit Hilfe eines rotierenden Sektors (Lummer-Brodhun). Dabei wird allerdings die Gültigkeit des Talbotschen Gesetzes für die photographische Platte<sup>3)</sup> vorausgesetzt.

Die folgende Tab. 1 gibt Auskunft über die erhaltenen Werte; die erste Spalte bezeichnet die Wellenlängen, die nachfolgenden das Durchlässigkeitsverhältnis je zweier benachbarter Stufen. Man sieht, daß innerhalb einer Fehlergrenze von 4 Proz. keinerlei Selektivität festzustellen war; die Abweichungen von den Mittelwerten streuen ohne bestimmten Gang.

Tabelle 1

$\lambda$ in Å	1:2	2:3	3:4	4:5
5460	1:1,46	1:2,09	1:2,08	1:2,29
4358	1:1,51	1:2,09	1:2,18	1:2,32
4046	1:1,48	1:2,05	1:2,24	1:2,19
3650	1:1,50	1:2,10	1:2,18	1:2,24
3341	1:1,48	1:2,02	1:2,20	1:2,16
Mittelwert	1:1,49	1:2,07	1:2,17	1:2,24

1) Lage der Vergleichslinie 2P—4D; vgl. hierzu § 6.

2) Es ist von der Firma Zeiss geliefert worden.

3) A. E. Weber, Ann. d. Phys. 45. S. 801. 1914; F. Goos, Ztschr. f. Phys. 31. S. 229. 1925.

In eine fortlaufende Proportion gebracht, ergibt sich für die Mittelwerte der Durchlässigkeiten <sup>1)</sup>

$$1 : 1,49 : 3,08 : 6,69 : 14,99.$$

Außerdem ergab sich bei *allen* Wellenlängen, daß die Strahlungsintensität durch die Stufe mit größter Durchlässigkeit genau auf ein Drittel geschwächt wird, so daß also die Absolutwerte der Durchlässigkeiten in Prozenten die folgenden sind:

2,22 Proz., 3,31 Proz., 6,86 Proz., 14,88 Proz., 33,33 Proz.

Zur Schwärzungsmessung wurde ein Hartmannsches Mikrophotometer verwendet, das mir von Hrn. Prof. Ladenburg freundlicherweise geliehen worden war.<sup>2)</sup>

Wie die Eichresultate zeigen, variiert bei Zwischenschaltung des Filters die auf die photographische Platte treffende Intensität längs einer Spektrallinie stufenförmig von 1 bis 15. Man kann aber mit dem angegebenen Photometer fehlerfrei nur einen Schwärzungsbereich überbrücken, der einem Intensitätsintervall von etwa 1 bis 12 entspricht.

Das bedeutet aber, daß je nach Wahl der Schwärzungen und der Lage des Meßbereiches des Photometers entweder die Stufe größter oder die kleinster Durchlässigkeit mit größerem Fehler in ihrem Schwärzungswert behaftet ist. Maßgebend für eine Entscheidung, auf welche Stufe man evtl. verzichten will, wurde das Auftreten einer Überstrahlungserscheinung auf der Platte: anschließend an die beiden Außenstufen geht nämlich ungeschwächte Strahlung durch das Filter; unterhalb der ersten Stufe mit *kleinster* Durchlässigkeit (2,22 Proz.) mußten sich also Schwärzungen ergeben, die einer 45fachen Intensitätssteigerung entsprechen, oberhalb der fünften Stufe mit *größter* Durchlässigkeit (33,3 Proz.) nur solche 3facher Intensitäts-

1) Zeiss gab an für das Durchlässigkeitsverhältnis:

$$1 : 1,50 : 3,00 : 6,75 : 15,0.$$

2) Die wichtigsten Platten der Arbeit wurden nach Beendigung derselben noch einmal zur Kontrolle mit dem selbstregistrierenden Photometer nach Koch-Goos ausgemessen, das inzwischen Fr. Kohn am Breslauer Institut von dem Elektrophysikausschuß der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft zur Verfügung gestellt worden ist. Resultat: die Aufnahmen lagen im günstigsten (normalen) Schwärzungsgebiet, Ergebnisse auf 5 Proz. mit den am Hartmannschen Instrument übereinstimmend.

steigerung. Bei der Kleinheit der Stufen mußte notwendig der genannte Kontrast an der ersten Stufe zu Überstrahlung führen. Deshalb wurde großer Wert darauf gelegt, die vier anderen Meßpunkte möglichst genau zu erhalten, und das Photometer in zweckmäßiger Weise darauf eingerichtet.

Die Intensitäten zweier Linien, die nicht unendlich benachbarten Spektralgebieten zugehören, lassen sich nach der photographisch-photometrischen Methode nicht *direkt* vergleichen; man muß sie vielmehr auf ein kontinuierliches Spektrum bekannter Energieverteilung beziehen, d. h. man vergleicht photographisch-photometrisch jede Linie mit dem entsprechenden Spektralbezirk des kontinuierlichen Spektrums und kann dann aus dessen Energieverteilung das gesuchte Intensitätsverhältnis der Linien errechnen. Bei der Ermittlung dieser Energieverteilung ist der Spaltbreite und der Dispersion Rechnung zu tragen.

§ 6. *Auswahl der Vergleichslinie.* Wie bereits (im § 2) gesagt worden ist, war es nötig, eine in einem mittleren Wellenlängengebiet gelegene Linie aufzufinden, die sich mit der ultraroten Linie energetisch, mit der ultravioletten Linie photographisch-photometrisch vergleichen läßt. Vorversuche mit der energetischen Methode zeigten, daß sich die grüne Linie  $2P-4D$  ( $\lambda = 5686 \text{ \AA}$ ) der diffusen Nebenserie des Natriums als sehr geeignet für einen Vergleich erwies. Auch von ihr waren die gleichen einwandfreien Energiekurven zu erhalten wie von der ultraroten Linie. Wie bereits (in § 4) dargelegt worden ist, war es unmöglich, beide zu vergleichenden Linien in *einer* Folge durchzumessen. Da die beiden Linien nicht miteinander in ihrer Erzeugung zusammenhängen (sie haben verschiedene Ausgangsniveaus), mußte die Reproduzierbarkeit ihrer Intensität eingehend wiederholt untersucht werden. Eine größere Anzahl von Messungen, unter gleichen Betriebsbedingungen an der einen und der anderen Linie vorgenommen, führten zu den gleichen Intensitätswerten, und zwar ergab sich für das Intensitätsverhältnis der beiden Linien konstant der Wert 1,05 (Näheres, auch bezüglich der Fehlergrenze, vgl. § 8, Tab. 3). Die Energiekurven der ultraroten Linie zeigen durchweg eine Unsymmetrie, die bei den einzelnen Messungen mehr oder weniger stark ausgeprägt ist. Sie ist dadurch zu erklären,

daß der kontinuierliche Untergrund am Ende des Bereiches, über den sich die Energiekurve erstreckt, etwas ansteigt. Dieser Anstieg wurde auch durch Energiemessungen mit reinen, ungefärbten Homogenkohlen nachgewiesen. Der Ausschlag selbst ließ sich mit etwa 5 Proz. Genauigkeit ablesen. Die Figg. 4 und 5 geben je ein Beispiel einer solchen Energiekurve. Als Ordinaten sind die Ausschläge aufgetragen, als Abszissen der

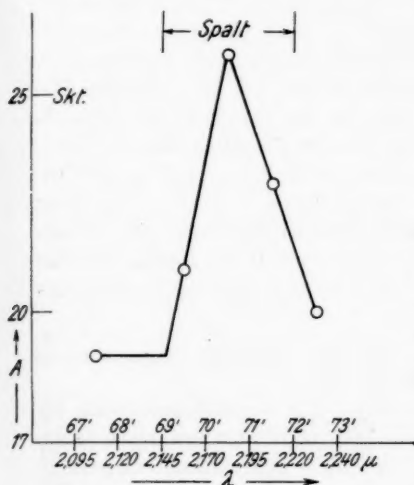


Fig. 4

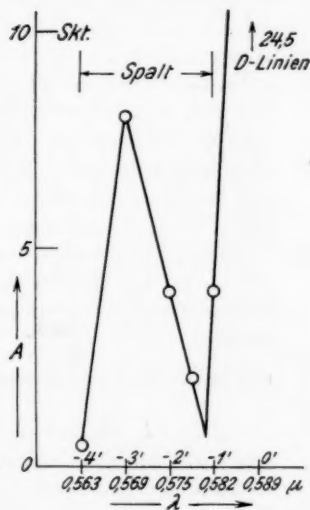


Fig. 5

Prismendrehwinkel bzw. die Wellenlänge. Als relative Strahlungsintensität wird aus diesen Kurven die Differenz des Maximalausschlags gegen den Grund entnommen, als Wert dieses Grundes wird ein Betrag verwendet, der durch Mittelung aus den Werten vor und hinter der Linie erhalten wird. Weitere Vorversuche zeigten nun auch, daß sowohl die ultraviolette Linie, wie auch die grüne Vergleichslinie einer photographisch-photometrischen Ausmessung keinerlei Schwierigkeiten bereiten würden. Beide Linien waren frei von störenden Banden in ihrer Nachbarschaft, beide Linien vor allem von nur geringfügigem kontinuierlichen Grunde umgeben.

Für den heterochromatischen Vergleich dieser beiden Linien war nun noch ein kontinuierlicher Strahler aufzufinden, der bei der gleichen Belichtungszeit gleichfalls ausreichende Schwärzungen lieferte. Bei intensiven Lichtquellen, wie z. B. dem Nernstfaden, elektrisch geglühtem Wolfram usw., die im Ultraviolett eine ausreichende Strahlungsenergie emittieren, kann man die Energieverteilung in diesem Spektralgebiet noch nicht als genügend exakt bestimmt ansehen. Ein elektrisch geheizter schwarzer Körper nach Lummer-Kurlbaum andererseits emittiert bei den erreichbaren Höchsttemperaturen außerordentlich wenig ultraviolette Strahlungsenergie. Es zeigte sich indessen, daß dieser schwarze Körper bei der höchsten Belastung, die man ihm zumuten konnte, gerade noch genügende Schwärzung lieferte. Dieser direkte Vergleich wurde jedoch nur bei den endgültigen quantitativen Messungen ausgeführt. Bei allen Untersuchungen, die der Prüfung der Zuverlässigkeit und Reproduzierbarkeit des Intensitätsverhältnisses der grünen zur ultravioletten Linie galten (§ 8), wurde als kontinuierliches Bezugsspektrum dasjenige eines hoch belasteten Nernstfadens gewählt.

## II. Gleichzeitige energetische und photographisch-photometrische Messungen

§ 7. *Die Versuchsanordnung.* Die Versuchsanordnung für die gleichzeitigen energetischen und photographisch-photometrischen Messungen ist in Fig. 6 schematisch dargestellt. Von der Lampe  $La$  aus trifft (unter kleinem räumlichen Winkel) ein Lichtbündel auf den Hohlspiegel  $H_1$ , der ein scharfes Bild des Bogens auf der Blende  $Bl_1$  entwirft. Dort werden sorgfältig die Kohlenspitzen ausgeblendet. Das Bündel trifft dann auf den Hohlspiegel  $H_2$ , der ein scharfes Bild der Blende und damit des Bogens auf dem Spalt des Ultrarotspektrometers  $Sp_1$  erzeugt. Hier wird das Licht spektral zerlegt und fällt nach Austritt aus dem Okularspalt  $Sp_2$  auf den Hohlspiegel  $H_3$ , der ein reelles, sehr verkleinertes, monochromatisches Bild des Spaltes auf der Lötstelle des Thermoelements im Mikroradiometer erzeugt, und zwar infolge der Wadsworth-Einrichtung von der Farbe, für die sich das Prisma im Minimum der Ablenkung befindet. Die verschiedenen Wellenlängen werden durch Drehen des Prismenstückes eingestellt.

Das Mikroradiometer und das Spektrometer befanden sich in einem gut abgeschlossenen großen Kasten, dessen Wände sich hochklappen ließen, voneinander durch eine Scheidewand getrennt. Das Meßinstrument stand auf Juliuscher Aufhängung, die Drähte wurden durch Löcher in den Kasten geführt, die Schwingungsdämpfung wurde durch ein in zähflüssiges Öl tauchendes Flügelrad bewirkt. Über dem Mikroradiometer befand sich eine vakuumdichte Haube mit Quarzfenster; sie war mit 30 m Asbestschnur in vielen Lagen umwickelt. Durch

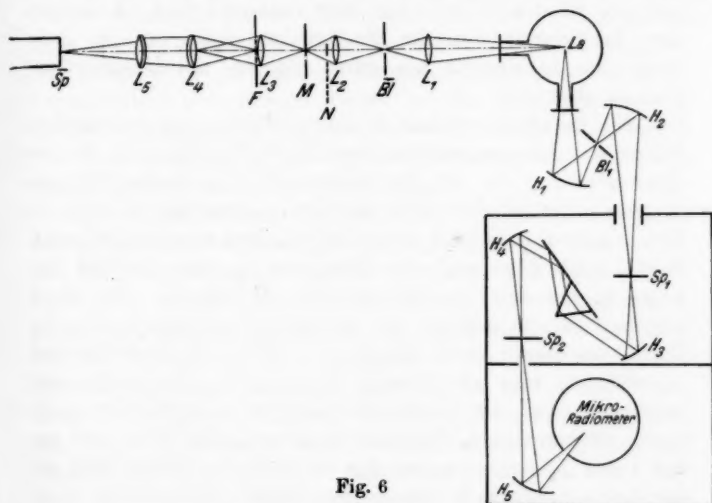


Fig. 6

eine Anzahl geeignet angebrachter Blenden wurde falsches Licht ferngehalten. Die beiden Spalte hatten die gleiche Weite (bei den endgültigen Messungen 0,3 mm). Der Prismen-tisch wurde von außen durch Schnurlauf verstellt, ebenso wurde die Noniusablesung am Teilkreis mit Hilfe eines total-reflektierenden Prismas und eines Fernrohrs von außen vorgenommen. Die zur Beleuchtung des Teilkreises nötige Lichtquelle, die nur momentweise zur Ablesung eingeschaltet wurde, mußte auch außen angebracht werden und bestand aus einer Lampe in wärmeisoliertem Gehäuse mit einem Filter davor, das alles ultrarote Licht absorbierte, so daß nur der

kleine Teil sichtbaren Lichtes in den Kasten nach dem Teilkreis gelangte. Obwohl der spektroskopische Strahlengang vor diesem Licht geschützt war, wirkte es immer noch störend auf die Ruhelage des Instrumentes ein. Es erwies sich als notwendig, bei der Messung den Kasten vor der Körperstrahlung des Messenden zu schützen. Ich befand mich deshalb während der Messung in einem großen Blechkasten und richtete durch ein Loch darin das Fernrohr auf den Spiegel. Vor dem Spektrometer waren zwei Klappen angebracht, die gleichzeitig hochgezogen wurden (eine davon war wassergekühlt). Außerdem war der Schutzkasten für die Apparate noch auf der Seite gegen die Lichtquelle hin durch Pappen mit Luftzwischenräumen gesichert.

Ein senkrecht zu dem eben betrachteten, aus dem zweiten Tubus der Lampe austretendes Strahlenbündel trifft auf die Quarzlinse  $L_1$ , die auf der Blende  $Bl$  ein scharfes Bild des Bogens in natürlicher Größe entwirft. Auch hier werden die Kohlenspitzen peinlichst ausgeblendet. Das austretende Lichtbündel fällt dann auf die Quarzlinse  $L_2$ , die ein Bild der Linse  $L_1$  auf einer Quarzmattscheibe  $M$  entwirft. Die Mattscheibe ließ sich leider nicht vermeiden, weil ohne sie weder durch den Bogen (noch durch den gleich zu besprechenden Nernstfaden) eine gleichmäßige Füllung des Spektrographen zu erzielen war. Die Mattscheibe ist also als eigentliche Lichtquelle zu betrachten. Das von ihr ausgehende Licht wird von der Linse  $L_3$  aufgenommen, die ein Bild der Mattscheibe auf der Linse  $L_4$  entwirft, dabei durchsetzt die Strahlung dicht hinter der Linse  $L_3$  das Stufenfilter  $F$ . Die Linse  $L_3$  hat lediglich die Aufgabe, das Stufenfilter gleichmäßig mit Licht zu füllen. Das Filter seinerseits wird nun verkleinert auf den Spalt des Spektrographen  $Sp$  abgebildet. Diese Abbildung wurde erzielt durch die Kombination zweier Quarz-Flußspat-achromate  $L_4$  und  $L_5$ <sup>1)</sup> gemäß dem sog. Kollektivsatz der geometrischen Optik. Bei dieser Abbildung ergab sich eine gleichmäßige Spaltbeleuchtung nur längs 6 mm, infolge der kleinen numerischen Apertur der Achromate. Das Filter

---

1) Diese wurden uns vom Marburger Institut geliehen, wofür ich an dieser Stelle vielmals danken möchte.



wurde daher so weit verkleinert abgebildet, daß seine 5 Stufen gerade 6 mm der Spaltlänge ausmachten. Die Justierung mußte regelmäßig nachgeprüft werden. Dazu wurde das Stufenfilter aus seiner Lage entfernt und nach Aufnahme die Spaltbeleuchtung auf der Platte photometrisch ausgemessen. — Der Spektrograph besaß zwei Quarz-Fußspat-Achromatobjektive, sein auflösendes System bestand aus zwei großen Quarz-Cornuprismen. Die Dispersion betrug 60 ÅE pro Millimeter bei  $\lambda = 5686$  ÅE und 11 ÅE pro Millimeter bei  $\lambda = 3303$  ÅE. Der Strahlengang von der Lichtquelle bis zum Spektrographenspalt erstreckte sich durch ein Loch in der Wand bis in das Nachbarzimmer. Ebenfalls in diesem befanden sich die Meßinstrumente. Die Räume waren durch Doppelfenster und Doppeltüren gegen Luftzug und Temperatenausgleich geschützt. Die Widerstände für die Ströme befanden sich außerhalb beider Zimmer in einem dritten Raum.

Die Mattscheibe *M* war an einem Gestell befestigt, das die Aufnahmevorrichtung für einen Nernstfaden trug. Nach den Bogenaufnahmen brauchte nur der Nernstfaden eingeschraubt zu werden, der sich dann in einer genau festgelegten Entfernung von 11 cm von der Mattscheibe (zwischen ihr und  $L_2$ ) befand. Die Mittelpunkte von Mattscheibe und Nernstfaden stimmten genau überein, die durch den Nernstfaden hervorgebrachte Spaltbeleuchtung war ebenfalls längs der 6 mm gleichmäßig. Im übrigen war die Abbildung der Mattscheibe auf den ersten Achromaten eine so stark vergrößerte, daß nur eine pfenniggroße Zentralpartie für den weiteren Strahlengang maßgebend war. Eine kleine Quecksilberlampe ließ sich zum Zwecke der Wellenlängenmarkierung zwischen  $B_1$  und  $L_2$  in den Strahlengang bringen. Die Plattensorte für die photographischen Aufnahmen durch das Filter hindurch mußte auf ihre Eignung sorgfältig ausprobiert werden, denn sie sollte die grüne, wie die ultraviolette Linie bei einer Belichtungszeit mit ungefähr gleichen Schwärzungen wiedergeben. Zu den Relativmessungen mit Nernstfaden wurde Hauff-Ultrarapid verwendet. Die Belichtungszeit, die für gut meßbare Schwärzungen der Stufen nötig war, betrug 10 Min., so daß während einer energetischen Messung gerade drei Aufnahmen gemacht werden konnten.

§ 8. *Relative Messungen, bezogen auf ein Nernstfadenspektrum.*  
 Die Messungen wurden in folgender Art vollzogen: Bei ruhigem Wetter wurden zunächst die Skalenlampen mindestens 12 Stdn. vor der Messung eingeschaltet. Dann wurden die Kohlen in die Lampe eingesetzt und in bezug auf beide Strahlengänge sorgfältig justiert. Die *D*-Linien wurden auf das Thermoelement des Mikroradiometers abgebildet und die ihnen zugeordnete Einstellung am Teilkreis des Spektrometers festgelegt. Dazu wurde eine Bunsenflamme mit Natriumlöffel benutzt. Für die beiden messenden Personen wurde zunächst eine ausprobierte Ersatzwärmequelle eingeschaltet, die beim Eintritt der Messenden vor der Messung ausgeschaltet wurde. Kurz vor Beginn der Messung wurde die Kühlvorrichtung in Betrieb gesetzt und getrocknetes Argon in die Lampe eingelassen. Dann wurde der Bogen gezündet, und während die energetische Messung an der ultraroten bzw. der grünen Linie vollzogen wurde, machte der Gehilfe drei Aufnahmen am Spektrographen, und zwar so, daß nach der ersten Bogenaufnahme die Kassette so weit zur zweiten Bogenaufnahme verschoben wurde, daß noch Raum für eine Aufnahme dazwischen verblieb; ebenso wurde die dritte Bogenaufnahme angeschlossen. In die Lücken wurde nach Beendigung der energetischen Messung und der Linienexposition je eine Nernstfadenaufnahme gedruckt. Da bei der durch die Bogenaufnahmen festgelegten Expositionszeit die Intensität des Nernstfadens im Grün wesentlich zu große Schwärzungen ergibt, so wurde die erste dieser beiden Aufnahmen durch ein Rauchglas hindurch ausgeführt, dessen Durchlässigkeit an der Wellenlänge  $\lambda = 5686 \text{ \AA}$  nur 24,1 Proz. betrug. Andererseits ist das Meßintervall des Stufenfilters kleiner als das Verhältnis der ultravioletten

Tabelle 2

Nr.	Lichtquelle	Spalt mm	Belichtungs- zeit (Min.)	Art der Aufnahme
I	Bogen	0,2	10	mit Stufenfilter
II	Nernstfaden	0,2	10	„ „ u. Rauchglas
III	Bogen	0,2	10	„ „
IV	Nernstfaden	0,2	10	ohne „
V	Bogen	0,2	10	mit „

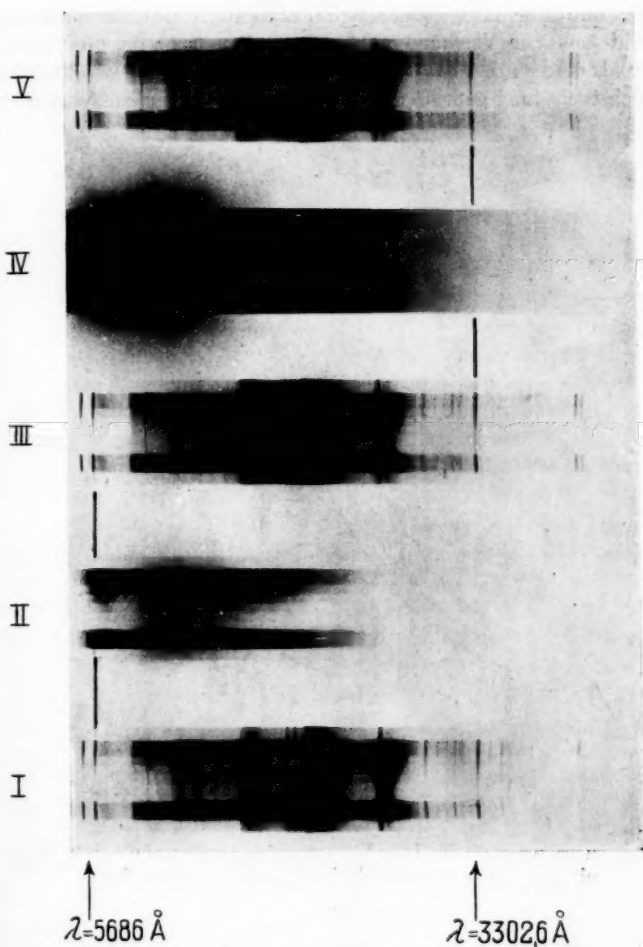
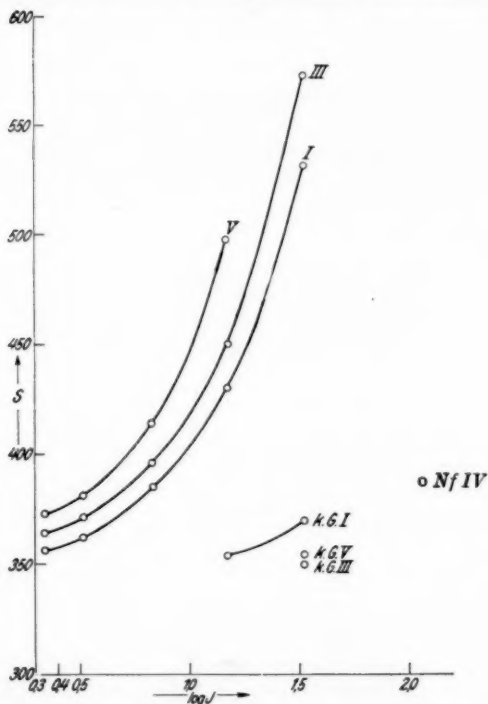


Fig. 7

Linienintensität zu der des entsprechenden Bezirks im Nernstfadenspektrum. Bei der zweiten Nernstfadenaufnahme wurde daher das Stufenfilter weggenommen, wodurch sozusagen eine weitere Stufe geschaffen wurde. Das hatte aber den Nach-

teil, daß nur ein einziger Schwärzungswert des Nernstfadenspektrums zur Verfügung stand, mit dem man in die Kurve der Linie einzugehen hatte. Der Nernstfaden wurde mit Höchstbelastung gebrannt. Die Spaltweiten waren zunächst alle



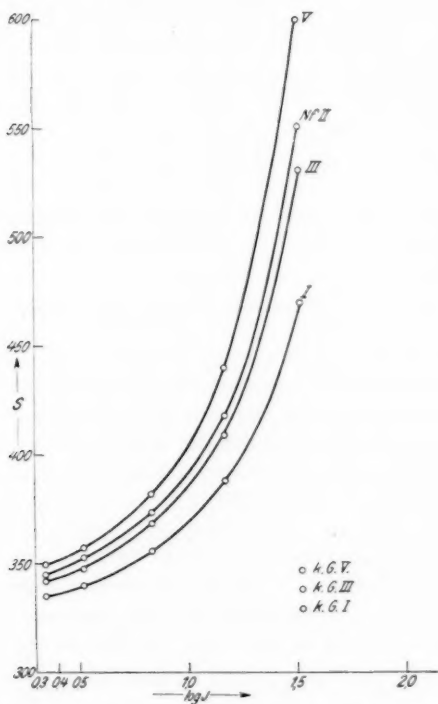
Schwärzungskurven für den Intensitätsvergleich der Bogenlinie  $\lambda = 3303 \text{ \AA E}$  mit dem entsprechenden Spektralbezirk des Nernstfadens

Fig. 8

gleich. Vorstehendes Aufnahmeschema (Tab. 2 auf S. 584) zeigt zusammenfassend noch einmal das Gesagte.

Fig. 7 zeigt eine Reproduktion einer solchen Platte, die Figg. 8 und 9 die zugehörigen Schwärzungskurven, die nach § 5 das Intensitätsverhältnis der ultravioletten Linie zur grünen liefern. Als Abszissen sind die Logarithmen der

prozentischen Durchlässigkeiten der einzelnen Filterstufen aufgetragen, als Ordinaten die zugehörigen Schwärzungen. Die lateinischen Zahlen an jeder Kurve geben die betreffende Aufnahme des Schemas an.



Schwärzungskurven für den Intensitätsvergleich der Bogenlinie  $\lambda = 5686 \text{ \AA}$  mit dem entsprechenden Spektralbezirk des Nernstfadens

Fig. 9

Bezeichnet man mit  $J_{ur}$ ,  $J_g$  und  $J_{uv}$  die Strahlungsintensitäten der ultraroten, grünen und ultravioletten Linie, so ist das gesuchte Verhältnis

$$F = \frac{J_{ur}}{J_{uv}} = \left( \frac{J_{ur}}{J_g} \right) \cdot \left( \frac{J_g}{J_{uv}} \right).$$

Der erste Faktor wird durch die energetischen Messungen bestimmt zu

$$\left(\frac{J_{ur}}{J_g}\right) = \left(\frac{J_{ur}}{J_g}\right)' \cdot S_R,$$

wobei  $\left(\frac{J_{ur}}{J_g}\right)'$  das direkt gemessene energetische Verhältnis ist und  $S_R$  ein Korrektionsfaktor, der durch die Verschiedenheit des Reflexionsvermögens der Spiegel für die beiden Linien bedingt ist. Für den zweiten Faktor ergibt sich aus den Schwärzungskurven

$$\frac{J_g}{J_{uv}} = \frac{a \cdot N_g}{b \cdot N_{uv}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{N_g}{N_{uv}},$$

wobei  $N_g/N_{uv}$  das Verhältnis der Strahlungsintensitäten der beiden Nernstfadenspektralbezirke in einem Normalspektrum ist. Es ist also

$$V = \frac{J_{ur}}{J_{uv}} = \left(\frac{J_{ur}}{J_g}\right)' \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{N_g}{N_{uv}}\right) \cdot S_R.$$

Der Quotient  $N_g/N_{uv}$  könnte durch photographisch-photometrischen Vergleich mit einem schwarzen Körper bekannter Temperatur ermittelt werden. Bei den relativen Messungen dieses Paragraphen, die der Prüfung der Konstanz und Reproduzierbarkeit der Intensitätsverhältnisse dienen, ist diese Auswertung jedoch nicht erforderlich. Ebenso kann vorläufig der Faktor  $S_R$  unbestimmt bleiben. Die Größen  $a$  und  $b$  sind die mit Hilfe der Schwärzungskurven ermittelten Verhältnisse der Linienintensität zu der des Nernstfadens an der gleichen Wellenlänge. Bei ihrer Auswertung ist der kontinuierliche Untergrund der Linien zu berücksichtigen. Die Schwärzungskurven liefern nicht die Größe  $a = \frac{J_g}{N_g}$ , sondern zunächst den Quotienten  $a' = \frac{J_g + J_k}{N_g}$ , wobei unter  $J_k$  die Intensität des kontinuierlichen Grundes am Orte der Linie verstanden ist. Die Schwärzungswerte des letzteren wurden gleichfalls (neben der Linie) gemessen und sind auf dem Kurvenblatt angegeben. Aus den graphisch ermittelten Verhältnissen  $a' = \frac{J_g + J_k}{N_g}$  und  $\varrho = \frac{J_g + J_k}{J_k}$  folgt durch einfache Rechnung:

$$a' = \frac{J_g + J_k}{N_g} = a + \frac{J_k}{N_g},$$

$$a = a' - \frac{J_k}{N_g} = a' \left( 1 - \frac{J_k}{N_g} \cdot \frac{1}{a'} \right) \\ = a' \left( 1 - \frac{J_k}{N_g} \cdot \frac{N_g}{J_g + J_k} \right) = a' \left( 1 - \frac{1}{q} \right).$$

Der kontinuierliche Grund war im allgemeinen sehr schwach, oft gab er Schwärzungen, die weit unter dem kleinsten Schwärzungswert der zugehörigen Linie liegen, so daß das Verhältnis  $q$  nicht zu bestimmen war. Der größte Wert von  $q$ , der noch eigentlich ausmeßbar ist, beträgt infolge der Durchlässigkeitsverhältnisse des Filters etwa 15, d. h. er liegt vor, wenn der kontinuierliche Grund 6,7 Proz. der Linienintensität besitzt. *Extrapolatorisch* ist aber aus der Gestalt der Schwärzungskurven auch noch ein Wert von 25 für  $q$  zu ermitteln, der also einem kontinuierlichen Grund von 4 Proz. entsprechen würde. Ein kleinerer Untergrund konnte wohl bisweilen festgestellt, aber nicht in Rechnung gesetzt werden; der hierdurch bewirkte Fehler in dem Quotienten  $a$  liegt also jedenfalls unter 4 Proz.

Die Tab. 3 gibt eine Reihe von Messungen, bei denen verschiedene Nernstfäden zum Vergleich dienten. Die Tabelle zerfällt in zwei Teile. Über dem Strich enthält sie eine Reihe der vorbereitenden energetischen Messungen, von denen in § 6

Tabelle 3

Datum	Aus- schlag Skt.	Linie	Wert $\frac{a}{b}$	energet. Mittelwerte
3. IX. 26	7	ultrarot		
7. „ „	6,3	„		
11. X. „	6,5	„		ultrarot grün
13. „ „	10	„		7,4 Skt. 7,0 Skt.
14. „ „	6	„		
15. „ „	8	grün		
20. „ „	8,5	ultrarot		$\left( \frac{J_{ur}}{J_g} \right)' = 1,06$
8. XI. „	6	grün		
23. IX. 27	5	ultrarot		
26. „ „	4	„	16,0 18,8 19,7	
28. „ „	3,5	„		ultrarot grün
30. „ „	4,2	grün	21,8 21,9 29,3	3,9 Skt. 3,7 Skt.
3. X. „	3	„	21,7 23,2 23,2	
4. „ „	3	ultrarot		$\left( \frac{J_{ur}}{J_g} \right)' = 1,05$
6. „ „	4	„	19,5 19,1 20,5	
12. „ „	4	grün		



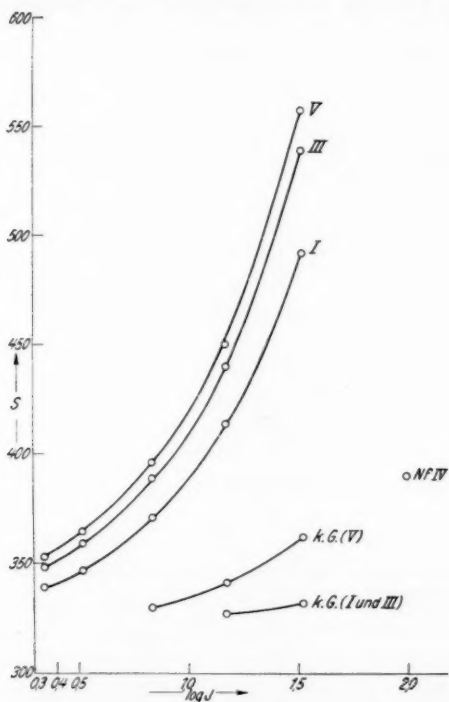
die Rede war, unter dem Strich enthält sie die gleichzeitigen energetischen und photographischen Messungen. Die Mikroradiometerempfindlichkeit ist bei der erstgenannten Reihe höher gewesen als bei den kombinierten Messungen. Bei einigen der letztgenannten Messungen mußte aus äußeren Gründen von der photographisch-photometrischen Messung abgesehen werden.

Aus der Tab. 3 ist zu ersehen, daß die energetischen Messungen für das Verhältnis  $\left(\frac{J_{uv}}{J_g}\right)'$  den Wert 1,05 ergeben, mit guter Konstanz und Reproduzierbarkeit. Aber auch das Verhältnis  $a/b$ , das sich, wie vorhin gezeigt, von  $J_g/J_{uv}$  nur um einen konstanten Faktor unterscheidet, beweist sich als durchaus reproduzierbar. Die mittlere Abweichung der Einzelwerte vom Mittelwert beträgt etwa 11 Proz. (die größte Abweichung 27 Proz.). Dabei ist jedoch noch in Betracht zu ziehen, daß hier vier verschiedene Nernstfäden zur Eichung vorgelegen haben. Um diese Unsicherheit auszuschalten, wurde noch eine Reihe von Aufnahmen ohne gleichzeitige energetische Messung gemacht, bei denen ein und derselbe Nernstfaden bei konstanter Belastung verwandt wurde. Dieser wurde auch unter etwas anderen Bedingungen gebrannt wie bei den eben betrachteten Messungen. Um die nötige Strahlungsenergie im Ultravioletten zu erzielen, ist dort der Nernstfaden mit 1 Amp. belastet worden. Dabei hatte sich gezeigt, daß die Lebensdauer bei dieser Belastung sehr klein war. Es wurde deshalb jetzt der Vergleichsnernstfaden mit geringerem Strom gebrannt, dafür aber der Spalt bei der ultravioletten Aufnahme weiter gemacht als bei der grünen; wodurch, entsprechend der größeren Dispersion im Ultraviolett, die Reinheit des Spektrums nur unwesentlich herabgesetzt wurde. Die Tab. 4 zeigt die Resultate dieser Aufnahme.

Tabelle 4

Datum	Verhältnisse $a/b$		
1. XI. 27	32,4	31,5	28,3
1. XI. 27	29,7	25,1	26,0
2. XI. 27	25,0	—	—
4. XI. 27	32,4	30,9	27,9

Fig. 10 und 11 geben die zu einer Platte gehörenden Schwärzungskurven. Auch hier zeigt sich wieder die für einen Lichtbogen erstaunliche Reproduzierbarkeit. Die mittlere Abweichung aller Werte  $a/b$  vom Mittelwert beträgt hier 8 Proz.,

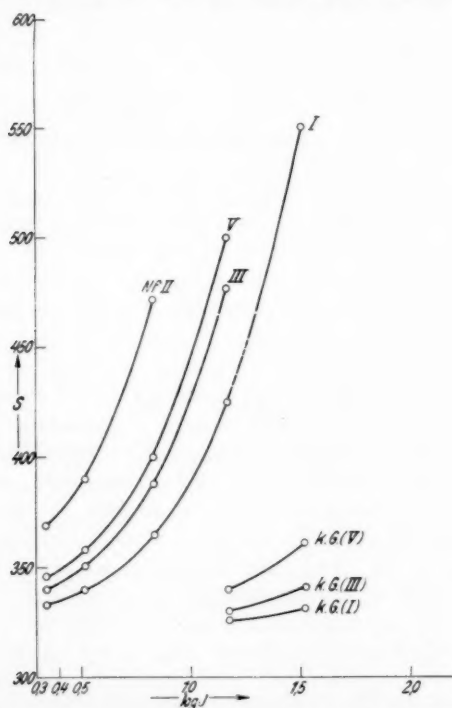


Schwärzungskurven für den Intensitätsvergleich der Bogenlinie  $\lambda = 3303 \text{ \AA}$  mit dem entsprechenden Spektralbezirk des Nernstfadens

Fig. 10

nur zwei Werte fallen stärker heraus (15 Proz.). Die Tab. 3 und 4 beweisen also, daß die Linienemission der Lichtquelle bei gleichen Betriebsbedingungen recht zuverlässig konstante und recht genau bestimmbare relative Werte besitzt. Auf Grund dieser Einsicht konnte der weitere methodische Fortgang zur Bestimmung des *Absolutwertes* des Intensitätsverhält-

nisses der ultraroten zur ultravioletten Linie stark vereinfacht werden: Wie oben gesagt, müßte man nun noch, um den Zahlenwert  $J_g/J_{uv}$  zu erhalten (vgl. S. 588) das unbekannte Verhältnis  $N_g/N_{uv}$  der Strahlungsintensitäten des Nernstfadens durch eine Eichung am schwarzen Körper bestimmen.



Schwärzungskurven für den Intensitätsvergleich der Bogenlinie  $\lambda = 5686 \text{ \AA}$  mit dem entsprechenden Spektralbezirk des Nernstfadens

Fig. 11

Dieser Umweg läßt sich vermeiden und damit die hohe Gesamtfehlergrenze stark erniedrigen, indem man die Bogenlinien direkt mit der Strahlung eines schwarzen Körpers vergleicht. Zwar würde die Anwesenheit eines so hoch temperierten Körpers im Zimmer eine gleichzeitige Ultrarotmessung

unmöglich machen; nach den besprochenen Ergebnissen war eine solche aber auch nicht mehr nötig, vielmehr erlaubte die durch die Strahlungsmessung nachgewiesene Reproduzierbarkeit des Verhältnisses  $\left(\frac{J_{ur}}{J_g}\right)'$  ein für allemal mit dem aus den Tabellen hervorgehenden Mittelwert 1,05 zu rechnen und den photographisch-photometrischen Vergleich der Bogenlinien mit dem schwarzen Körper unabhängig von der Strahlungsmessung vorzunehmen.

§ 9. *Absolute Messung durch Eichung am schwarzen Körper.* Zur Verfügung stand ein kleiner elektrisch geglühter schwarzer

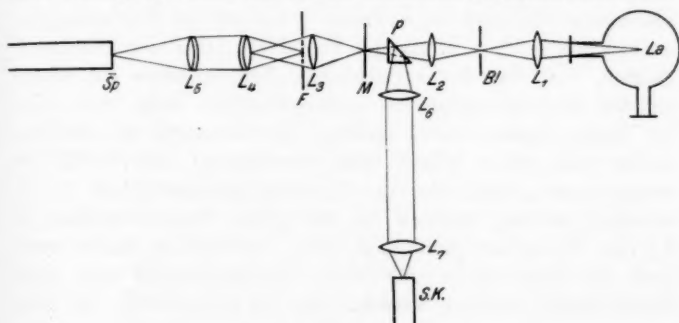


Fig. 12

Körper nach Lummer-Kurlbaum mit einer Öffnung von 1,6 cm Ø. Sein Heizrohr war mit einer vollständigen Platinhaut überzogen. Er wurde mit heruntertransformiertem Wechselstrom geheizt maximal bis auf 1500° C. Die Versuchsanordnung mußte so beschaffen sein, daß sie erlaubte, abwechselnd die Strahlung der Bogenlampe und die des schwarzen Körpers auf die Platte einwirken zu lassen. Dazu konnte der Strahlengang von der Lampe her ganz unverändert bleiben, wie Fig. 12 zeigt. Um die Strahlung des schwarzen Körpers auf den Spalt zu richten, wurde lediglich in den Nernstfadenhalter vor der Mattscheibe M ein totalreflektierendes Quarzprisma P eingeschraubt. Das vom Hohlraum ausgehende Lichtbündel fiel auf einen Quarzkondensor unter großem räumlichen Winkel und wurde parallel gemacht. Eine zweite Quarzlinse bildete dann auf dem Wege über das totalreflektierende Prisma die

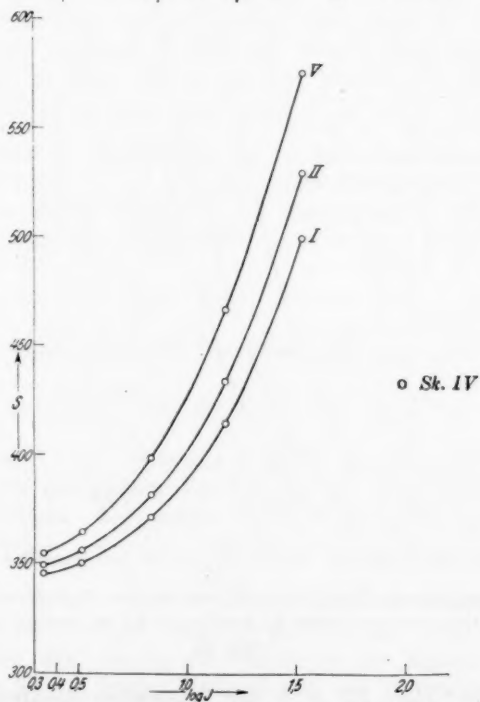
Öffnung des schwarzen Körpers auf die Mattscheibe scharf ab. Durch einfaches Ein- und Ausschrauben des Prismas war also ohne Zeitverlust der Strahlengang für die eine oder die andere Lichtquelle hergestellt. Die Temperatur des schwarzen Körpers wurde mit Hilfe eines Thermoelementes bestimmt, dessen Spannung mit Kompensationsapparat und Normalelement gemessen und an Hand einer Eichkurve der P.T.R. auf Temperaturen ausgewertet wurde. Die Kompensation wurde in einem dritten Raum von einem Gehilfen ausgeführt. Der Wechselstrom wurde von einer 50~ Maschine geliefert, deren Spannung sehr konstant blieb, so daß auch die Temperatur des strahlenden Hohlraums während der Aufnahmen nur geringe Schwankungen aufwies (um  $\pm 2^\circ$ , d. h. um  $\pm 1$  Promille). Die Probeaufnahmen zeigten, daß bei den erreichbaren Temperaturen die ultraviolette Strahlungsintensität außerordentlich klein war. Um für diesen Spektralbezirk meßbare Schwärzungen zu erhalten, mußte (wie schon früher beim Nernstfaden) das Stufenfilter weggenommen, außerdem der Spektrographenspalt auf 2 mm erweitert werden, während für die grüne Vergleichsaufnahme 0,1 mm Weite genügte (vgl. S. 595). Schließlich mußte auch noch die Mattscheibe für beide Spektralbezirke aus dem Strahlengang entfernt werden. Da sie andererseits für den Strahlengang des Lichtbogens zur gleichmäßigen Füllung des Spektrographen unentbehrlich war, so mußte sie in bezug auf Selektivität der Durchlässigkeit untersucht werden. Die Lichtschwächung durch eine Mattscheibe ist keine durch eigentliche Absorption, sondern eine durch Streuung bedingte; sie hängt ab von der Richtung des einfallenden Strahlenbündels und daher von der Größe seines räumlichen Winkels. Wie noch zu besprechende Untersuchungen zeigten, erwies sich jedoch das *Verhältnis* der Durchlässigkeiten für zwei verschiedene Wellenlängen, auf das es hier nur ankommt, *unabhängig* vom räumlichen Winkel des auf die Mattscheibe auffallenden Lichtbündels.

Die Aufnahmen auf einer Platte wurden nach dem folgenden Schema (Tab. 5) hergestellt.

Die Belichtungszeit (für alle Aufnahmen natürlich gleich) konnte auf 5 Min. herabgesetzt werden durch Verwendung von einer neuen, höchst empfindlichen Platte (Lomberg Ortho-

Tabelle 5

Nr.	Lichtquelle	Belich- tungszeit Min.	Spalt- weite mm	Art der Aufnahme
I	Bogen	5	0,3	Mit Stufenfilter, mit Mattscheibe
II	"	5	0,3	" " " " "
III	Schw. Körper	5	0,1	" " , ohne "
IV	"	5	2,0	Ohne " " " "
V	Bogen	5	0,3	Mit " , mit "

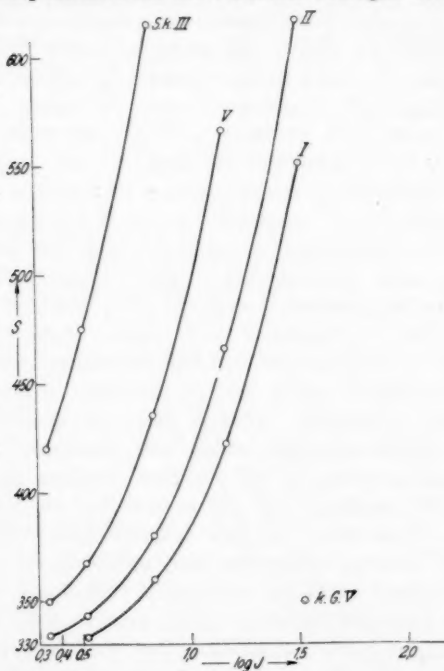


Schwärzungskurven für den Intensitätsvergleich der Bogenlinie  $\lambda = 3303 \text{ \AA}$  mit dem entsprechenden Spektralbezirk des schwarzen Körpers

Fig. 13

Elur 22). Die Figg. 13 u. 14 geben die zu einer solchen Aufnahmenfolge gehörenden Schwärzungskurven. Drei Platten mit zusammen 9 Werten des Intensitätsverhältnisses fielen bezüglich

der Schwärzung des schwarzen Körperspektrums so aus, daß sie gut ausgewertet werden konnten. Die Auswertung und Ausmessung war die gleiche wie bei den früheren, den Nernstfaden als Vergleichslichtquelle benutzenden Aufnahmen. Die Hohlraumtemperaturen für die 3 Platten betrugen  $1740^{\circ}$ ,  $1734^{\circ}$



Schwärzungskurven für den Intensitätsvergleich der Bogenlinie  $\lambda = 5686 \text{ \AA}$  mit dem entsprechenden Spektralbezirk des schwarzen Körpers

Fig. 14

und  $1733^{\circ}$  abs. Mit Hilfe der Wienschen Spektralgleichung läßt sich aus der Temperatur das zugehörige Verhältnis der Strahlungsintensitäten an den in Frage stehenden Wellenlängen für das Normalspektrum ausrechnen. Es ergibt sich den drei Temperaturen entsprechend

$$\frac{E_{g,T}}{E_{uv,T}} = 2238, \text{ bzw. } = 2321, \text{ bzw. } = 2333.$$



Ehe die Ergebnisse der Strahlungsseichung mitgeteilt werden, soll erst noch deren Sinn im Zusammenhang der Aufgabe analytisch formuliert werden. Das zu bestimmende Intensitätsverhältnis ist, in der oben (S. 588) angegebenen Bezeichnungsweise

$$F = \frac{J_{ur}}{J_v} = \left( \frac{J_{ur}}{J_g} \right) \cdot \left( \frac{J_g}{J_v} \right),$$

wobei  $J_{ur}$ ,  $J_g$ ,  $J_v$  die Intensitäten der ultraroten, der grünen und der ultravioletten Linie bedeuten. Die beiden Quotienten sind getrennt bestimmt worden, die Berechtigung dazu ist nachgewiesen worden. Das energetisch gemessene Verhältnis  $\left[ \left( \frac{J_{ur}}{J_g} \right)' \right]$  vgl. § 8 ist noch nicht identisch mit  $\left( \frac{J_{ur}}{J_g} \right)$ , vielmehr muß noch die Verschiedenheit des Reflexionsvermögens des Silbers für 22000 ÅE und 5686 ÅE berücksichtigt werden. Das geschieht durch Multiplikation mit dem schon S. 588 eingeführten Faktor  $S_R$ , mithin wird

$$\frac{J_{ur}}{J_g} = \left( \frac{J_{ur}}{J_g} \right)' \cdot S_R.$$

Der andere Quotient ist aus der Beziehung

$$\frac{J_g}{J_v} = \frac{a \cdot E_{g,T}}{b \cdot E_{v,T}} \cdot S_M \cdot D \cdot L = \frac{a}{b} \cdot v_T \cdot S_M \cdot D \cdot L$$

zu bestimmen. Dabei bedeuten  $a$  und  $b$  die photographisch-photometrisch gemessenen Verhältnisse der Intensitäten der Linien zu denen der entsprechenden Spektralbezirke des schwarzen Körpers und  $v_T = \frac{E_{g,T}}{E_{v,T}}$  den aus der Strahlungsformel berechneten Quotienten der Strahlungsintensitäten des schwarzen Körpers.  $S_M$ ,  $D$  und  $L$  sind Korrektionsfaktoren, und zwar ist  $S_M$  das Verhältnis der Mattscheibenschwächung an den beiden Wellenlängen und  $D$  der Umrechnungsfaktor auf das normale, d. h. das der Dispersion entsprechende Spaltbreitenverhältnis.  $L$  ist ein Faktor, der dem durch Selbstabsorption im Bogen verschwundenen Anteil der ultravioletten Linie Rechnung trägt (vgl. w. u.). Mithin wird

$$F = \frac{J_{ur}}{J_v} = \left( \frac{J_{ur}}{J_g} \right)' \cdot S_R \cdot S_M \cdot D \cdot L \cdot \frac{a}{b} \cdot v_T.$$

Der Wert von  $\left(\frac{J_{ur}}{J_g}\right)'$  ist 1,05. Aus den Strahlungszeichnungen auf drei verschiedenen Platten ergeben sich neun Zahlenwerte für  $\frac{a}{b} \cdot v_T$ ; sie sind in der Tab. 6 angegeben.

Tabelle 6

59,8	43,9	63,8
63,4	65,6	70,0
66,5	64,1	82,4

Der Mittelwert dieser Größen beträgt 64,4. Die Korrektur für den kontinuierlichen Grund ist darin bereits berücksichtigt. Die mittlere Abweichung von diesem Mittelwert beträgt bei 7 Einzelwerten  $\pm 2$  Proz., die größte Abweichung (2 Werte) 28 Proz. Die Größen  $S_R$  und  $D$  sind leicht auszurechnen. Das Reflexionsvermögen des Silbers hat an den Wellenlängen 5686 ÅE und 22000 ÅE den Wert 0,92 bzw. 0,98 Proz., der Strahlengang enthält 6 Silberspiegel, mithin wird

$$S_R = \left(\frac{92}{98}\right)^6 = \frac{1}{1,46}.$$

Weiterhin folgt aus der Dispersionskurve, daß sich die Spaltbreiten für  $\lambda = 3303$  ÅE und  $\lambda = 5686$  ÅE wie 5,56 : 1 verhalten müßten, wenn in beiden Fällen gleich breite Spektralbezirke  $d\lambda$  aufgenommen werden sollen. Da aber für die Ultraviolett-messung der Spalt nicht nur 5,56 mal so groß wie für die Messung im Grün gewählt wurde, sondern rund 20 mal so groß (nach genauer Untersuchung der Mikrometerschraube des Spaltes  $\frac{1,985}{0,085}$  mal so groß), so ergibt sich  $D$  zu  $\frac{1}{4,2}$ . Die Bestimmung des Faktors  $S_M$  wurde wieder photographisch-photometrisch vorgenommen. An die Stelle des schwarzen Körpers wurde eine zweite Quarzmattscheibe gebracht, die durch einen Nernstfaden hell beleuchtet wurde. Sie diente als gleichförmige Lichtquelle und wurde auf die im Aufbau bei den Lampenaufnahmen stets verwendete *erste* Mattscheibe am Filter abgebildet. Es wurden dann Aufnahmen in dem grünen, wie in dem ultravioletten Spektralbezirk gemacht, einmal mit und dann ohne die Mattscheibe am Filter. Durch verschiedene Art der Abbildung wurde der räumliche Winkel, unter dem das Strahlenbündel auf die besagte Mattscheibe traf, in weiten Grenzen

verändert. Es zeigte sich die Schwächung selbst *sehr* stark abhängig von diesem Winkel, aber das Verhältnis der Durchlässigkeiten für die beiden Wellenlängen erwies sich als *unabhängig* von der Abbildung. Auch hier mußte des großen Intensitätsintervalles wegen bei den Aufnahmen mit Mattscheibe das Stufenfilter weggenommen werden. Außerdem mußte Veränderung der Spaltweite zur meßbaren Abschwächung mit-helfen. Es ergaben sich für das Verhältnis der Durchlässigkeiten an der ultravioletten und an der grünen Linie bei vier verschiedenen räumlichen Winkeln die folgenden Werte:

$$\frac{1}{90} : \frac{1}{45} \quad \frac{1}{40} : \frac{1}{19,5} \quad \frac{1}{38,1} : \frac{1}{20,1} \quad \frac{1}{15,6} : \frac{1}{7,48}.$$

Es ist also der Faktor  $S_M = \frac{1}{2}$ , mit 5 Proz. Abweichung. —

Mit der Bestimmung des Faktors  $L$ , der der Selbstabsorption Rechnung trägt, beschäftigt sich der nächste Abschnitt. Erst am Abschluß dieses Abschnitts soll der Wert für das Verhältnis  $J_{uv}/J_{uv}$  berechnet werden.

### III. Bestimmung der Selbstabsorption mit Hilfe der Linienabsorption

§ 10. *Grundlagen der Methode.* Die Linie  $1S-3P$  endigt im Normalzustand; es ist evident, daß durch unangeregte Atome ein Teil der Intensität dieser Linie infolge von Selbstabsorption verschwinden muß. Natürlich wird sich auch Eigenabsorption bei der Linie  $2S-3P$  bemerkbar machen; jedoch ist ihr Betrag zu vernachlässigen gegenüber demjenigen bei der ultravioletten Linie. Das zeigt eine Ausrechnung der Stärke der Absorption (Zahl der Absorptionsoszillatoren  $\mathcal{N}$ ) für die beiden Linien. Gemäß der bekannten Beziehung von Ladenburg<sup>1)</sup> ist

$$\mathcal{N} = N_i \cdot b_{ik} \cdot h \cdot \nu_{ik} \cdot \frac{m}{\pi e^2} = N_i \cdot a_{ki} \cdot \frac{g_k}{g_i} \cdot \frac{m c^2}{8 \pi^2 e^2 \nu_{ki}^2}.$$

Dabei bedeutet  $N_i$  die Zentrenzahl im unteren Zustand,  $b_{ik}$  ist die Ü.-W. der Absorption,  $a_{ki}$  die der spontanen Emission.  $g_k$  und  $g_i$  sind die Quantengewichte der beiden Zustände. Für

1) R. Ladenburg, Ztschr. f. Phys. 4. S. 451. 1921.

das Verhältnis der Zahl der Absorptionsschwingungen erhält man also

$$\frac{\mathfrak{N}_{uv}}{\mathfrak{N}_{uv}} = \frac{N_{2s} \cdot a_{2s-3p} \cdot \frac{g_{3p}}{g_{2s}} \cdot \left( \frac{1}{\nu_{2s-3p}} \right)^2}{N_{1s} \cdot a_{1s-3p} \cdot \frac{g_{3p}}{g_{1s}} \cdot \left( \frac{1}{\nu_{1s-3p}} \right)^2}.$$

Rechnet man das Verhältnis  $N_{2s}/N_{1s}$  für statistisches Gleichgewicht aus, einer Temperatur von  $4200^\circ$  abs. entsprechend<sup>1)</sup>, und setzt für das Verhältnis der Ü.-W. den experimentell gefundenen Wert dieser Arbeit ein (vgl. S. 610), so findet man

$$\frac{\mathfrak{N}_{uv}}{\mathfrak{N}_{uv}} \sim \frac{1}{22}.$$

Wir müssen nun einen methodisch wichtigen Begriff einführen, der von Ladenburg und Reiche<sup>2)</sup> definiert worden ist, die sog. *Linienabsorption*. Unter Linienabsorption versteht man die Gesamtaborption, die das Licht einer Spektrallinie erfährt, das von einem dem absorbierenden Strahler völlig gleichen Strahler ausgeht. Man bestimmt die Linienabsorption  $A_L$  durch Messung des Helligkeitszuwachses der untersuchten Spektrallinie bei *Verdopplung* der leuchtenden Dampfschicht. Denn die Helligkeit  $J'$  bei doppelter Schicht ist bestimmt zu

$$J' = J + J(1 - A_L),$$

woraus sich ergibt

$$\frac{J'}{J} = 2 - A_L.$$

Der Quotient  $2 - A_L$  wurde von Gouy<sup>3)</sup> mit  $k$  bezeichnet. Gouy hat diese Größe bereits vor 50 Jahren in seiner Arbeit „recherches sur les flammes colorées“ an einer Reihe von Alkalien und Erdalkalien in Abhängigkeit von der Linienintensität  $J$  visuell-photometrisch gemessen. Dabei hat er in allen untersuchten Fällen einen überaus ähnlichen Verlauf für  $k$  als Funktion von  $J$  erhalten: Der  $k$ -Wert fällt von einem dem Betrag 2,0 angenäherten Wert bei unendlich geringer

1) Oberer Grenzwert für die thermische Temperatur im Kohlelichtbogen.

2) R. Ladenburg u. F. Reiche, Ann. d. Phys. 42. S. 181. 1913.

3) G. L. Gouy, Annales de Chimie et de Phys. 18. S. 5. 1879.

Zentrenzahl mit wachsender Zentrenzahl, also zunehmender Helligkeit, ziemlich schnell ab und nähert sich rasch einem unteren Grenzwert von ungefähr  $k = \sqrt{2}$ . Das entspricht einer Linienabsorption von etwa 59 Proz. Aus der Funktion  $k = f(J)$  hat Gouy nun weiterhin eine Beziehung zwischen der Zentrenzahl  $\mathfrak{N}$  und der Intensität  $J$  bestimmt, unter Zugrundelegung der Annahme, daß (bei konstanter Temperatur) die Strahlungseigenschaften der leuchtenden Schicht *nur* vom Produkt: Dampfdichte  $\times$  Schichtdicke abhängen. Bei dieser Annahme muß der Helligkeitszuwachs und damit der  $k$ -Wert, der durch Verdopplung der Dampfdichte erzielt wird, der gleiche sein, wie der durch Verdopplung der Schichtlänge erhaltene, d. h. also

$$\frac{J_{2l}}{Jl} = k = \frac{J_{2q}}{Jq},$$

wobei unter  $l$  die Schichtdicke, unter  $q$  die Dampfdichte zu verstehen ist. Also ist

$$J_{2q} = Jq \cdot k_q.$$

Setzt man bei  $k = 1,9$  willkürlich  $J = 1$  und  $q = 1$ , so ist

$$J_{q=2} = J_{q=1} \cdot k_{q=1} = 1 \cdot 1,9 = 1,9,$$

$$J_{q=4} = J_{q=2} \cdot k_{q=2} = 1,9 \cdot k_{J=1,9};$$

den Wert von  $k$  bei  $J = 1,9$  kann man aus der Kurve, die  $k$  als Funktion von  $J$  darstellt, entnehmen, und so  $J_{q=4}$  auswerten. Führt man diese Rechnung in der angegebenen Weise weiter fort, so erhält man aus der gemessenen Beziehung zwischen  $k$  und  $J$  die Werte von  $J$  als Funktion von  $q$  bzw. (da  $q$  proportional zu  $\mathfrak{N}$  ist), von  $J$  als Funktion von  $\mathfrak{N}$ . Die Figg. 15 und 16 stellen die genannten Funktionen dar,  $k = f(J)$  die gemessene, und  $J = \varphi(q)$ , bzw.  $= \Phi(\mathfrak{N})$  die aus ihr graphisch berechnete. Sowohl  $J$  als auch  $\mathfrak{N}$  sind in *willkürlichen* Einheiten angegeben. Man kann also nicht etwa aus der Gouykurve einem gemessenen Wert von  $k$  einen *Absolutwert* von  $J$  und damit von  $\mathfrak{N}$  zuordnen. Der Wert dieser methodischen Betrachtung liegt vielmehr in der zwangsläufigen *Funktionalverbindung* zwischen  $J$  und  $\mathfrak{N}$ . Betrachtet man den Teil der  $k$ -Kurve, wo  $k = \sqrt{2}$  ist, so erhält man aus der Gleichung

$$\frac{J_{2q}}{Jq} = k \quad \text{die Beziehung} \quad \frac{J_{2\mathfrak{N}}}{J_{\mathfrak{N}}} = \sqrt{2}, \quad \text{d. h. die Helligkeit}$$

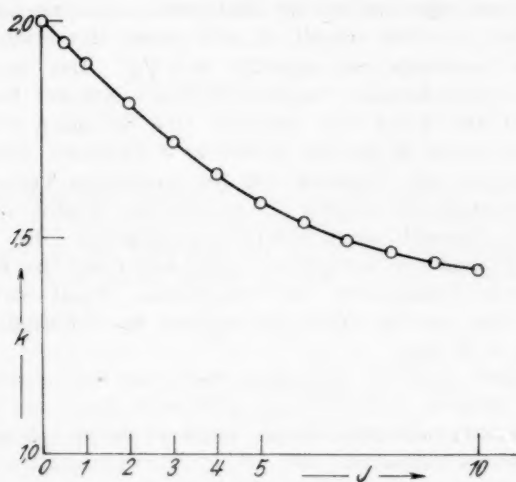
Gouykurve  $k = f(J)$ 

Fig. 15

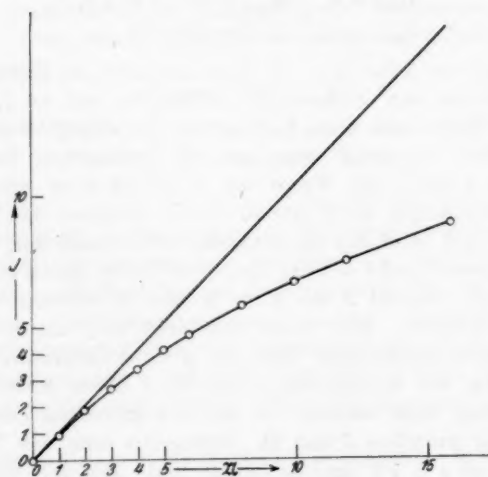
Gouykurve  $J = \Phi(\eta)$ 

Fig. 16

nimmt proportional der *Wurzel* aus der Zentrenzahl zu, während bei unendlich kleiner Zentrenzahl die Helligkeit proportional der Zentrenzahl *selbst* anwächst, wie auch aus der Kurve  $J = \Phi(\mathfrak{N})$  zu ersehen ist. Daß die Helligkeitszunahme immer kleiner ist, als der Zuwachs der Zentrenzahl, hat seinen Grund im Auftreten der *Selbstabsorption*. Je mehr Zentren geschaffen werden, desto größer wird natürlich auch die Absorptionsmöglichkeit innerhalb der Lichtquelle. Die Gouyschen Untersuchungen wurden an gefärbten *Flammen* von relativ niedriger Temperatur (Bunsenflamme) durchgeführt. Die spezifische *Gestalt* der von Gouy gewonnenen Funktion  $k=f(J)$  [und der aus ihr folgenden Funktion  $J = \Phi(\mathfrak{N})$ ] ist daher streng genommen in ihrer Gültigkeit auf die Emission dieser Flamme beschränkt. Das Wurzelgesetz wurde durch Messungen von Senftleben<sup>1)</sup> quantitativ bestätigt, bei denen er gleichzeitig die Helligkeit und die Zahl der Emissionszentren an der Natriumflamme bestimmte.

Ladenburg und Reiche (a. a. O.) konnten die von Gouy gefundene Abhängigkeit der Linienabsorption von der Helligkeit, bzw. der Helligkeit von der Zentrenzahl theoretisch ableiten. Es zeigte sich, daß das Aussehen der Funktion  $k=f(J)$  wesentlich durch die Intensitätsverteilung in der emittierten und absorbierten Linie bestimmt ist. Die Kurve hat bei Rayleighscher Intensitätsverteilung eine ganz andere Form als bei Dispersionsverteilung. Der *wesentliche* Verlauf der Gouyschen Flammenkurve wird durch Zugrundelegung der Dispersionsverteilung erhalten. Insbesondere ergibt sich auch das Resultat, daß bei *geringer* Zentrenzahl die Helligkeit  $J$  der Zentrenzahl  $\mathfrak{N}$  *proportional*, bei *großer* dagegen proportional der *Wurzel* aus der Zentrenzahl und der Wurzel aus der Dämpfung ist. Um Feinheiten des Verlaufs wiedergeben zu können, mußten die Verfasser für kleine Werte der Dampfdichte der Dispersionsverteilung noch die Rayleighsche Verteilung superponieren.

Legt man nun, wie es in Fig. 16 zu sehen ist, die Tangente an die Kurve  $J = \Phi(\mathfrak{N})$  im Nullpunkt, so ergeben

1) H. Senftleben, Diss. Breslau 1915, außerdem Ann. d. Phys. 47. S. 949. 1915.

die Ordinatendifferenzen zwischen dieser geraden Linie und der Kurve den *relativen* Betrag der in der Lichtquelle eigenabsorbierten Intensität, das Verhältnis der Ordinatenwerte bei einer bestimmten Zentrenzahl gibt das Verhältnis der „wahren“ zu der beobachteten Linienintensität an. Unter der „wahren“ Intensität ist diejenige Intensität zu verstehen, die von der betreffenden Zahl von Zentren ausgestrahlt werden würde, wenn der Strahlungsvorgang der gleiche wäre wie bei unendlich geringer Zentrenzahl (und auf *diese* bezieht sich der Bohr-Einsteinsche Quantenansatz).

Mit Hilfe dieser Überlegung ist man nun in der Tat in der Lage, den Betrag der eigenabsorbierten Intensität, sowie den der „wahren“ Linienintensität zu bestimmen, *sofern man die Gültigkeit der von Gouy gemessenen Funktion  $k = f(J)$  für die betreffende Lichtquelle voraussetzen darf*. Man mißt die Linienabsorption an der in Frage kommenden Linie, entnimmt aus der Gouykurve die zugehörige Intensität (in willkürlicher Einheit). Zu dieser Intensität bestimmt man aus der  $J = \Phi(\mathfrak{N})$ -Kurve das zugehörige  $\mathfrak{N}$  (ebenfalls in willkürlicher Einheit). Der zu diesem  $\mathfrak{N}$ -Wert gehörige Wert der „wahren“ Intensität  $J$ , der auf der extrapolatorisch gezeichneten Tangente an die Gouykurve als die zu  $\mathfrak{N}$  gehörige Ordinate abzulesen ist, ergibt sich also von selbst in der gleichen Einheit wie das in Erscheinung tretende  $J$ . Das Verhältnis von  $J/J$  ist mithin vollständig *unabhängig* von der Wahl der Einheit, ist also eine reine Zahl und ergibt den Faktor, mit dem die gemessene Intensität zu multiplizieren ist, um zu der „wahren“ Intensität zu gelangen.

Um von der eben angegebenen Methode auch bei anderen Lichtquellen Gebrauch machen zu können, muß man für jede besondere Lichtquelle, bei deren Linien man den Betrag der Selbstabsorption bestimmen will, die Funktion  $k = f(J)$  zuvor experimentell ermitteln. Liegt die Kurve erst einmal vor, dann ist, wie gezeigt, durch die Messung der Linienabsorption, also durch die Bestimmung des *einen* zu einer bestimmten Linie gehörigen  $k$ -Wertes, der Betrag der Selbstabsorption dieser Linie ermittelt.

Da im Lichtbogen die Funktion  $k = f(J)$  noch nicht gemessen wurde, so habe ich für die Bestimmung der Selbst-



absorption an der Linie 1 S — 3 P einstweilen die Gouykurve der Flamme benutzt. Es ist aber sehr wahrscheinlich, daß die Rayleighsche Verteilung beim Lichtbogen, dessen Temperatur viel größer als die der Bunsenflamme ist, eine wesentliche Rolle spielt.<sup>1)</sup>

Das Resultat der nachfolgenden  $k$ -Messung sei hier vorweggenommen. Durch Linienabsorptionsmessung an der Linie  $\lambda = 3303 \text{ \AA}$  wurde ein  $k$ -Wert von 1,53 (vgl. S. 609) gefunden. Dazu ergibt sich aus der Fig. 15 der Wert 6,1 für  $J$ . Aus Fig. 16 ergibt sich dazu der  $\mathcal{R}$ -Wert 8,7, und eine Parallele zur Ordinatenachse durch  $\mathcal{R} = 8,7$  schneidet die extrapolatorische Gerade in dem Werte  $J = 8,9$ . Das Verhältnis  $\frac{\bar{J}}{J} = \frac{8,9}{6,1} = 1,48$  gibt also an, daß die gemessene ultraviolette Linienintensität mit 1,48 zu multiplizieren ist, um die „wahre“ Intensität zu erhalten.

Diese Methode zur Ermittlung der Selbstabsorption durch eine  $k$ -Messung ist jedoch in dieser einfachen Form nur bei relativ kleiner Zentrenzahl anwendbar. Denn ist  $k$  bei seinem Grenzwert angekommen, dann ist dem  $k$ -Wert kein Wert für  $J$  aus der Gouykurve eindeutig zuzuordnen.

§ 11. *Ausführung der  $k$ -Messungen.* Für den Fall, daß man nicht zwei völlig gleiche Lichtquellen zur Verfügung hat, bestimmt man nach einer von Gouy angewandten Methode die Linienabsorption, indem man die Verdoppelung der Schichtdicke durch Spiegelung erzielt. Man vergleicht also photographisch-photometrisch die Linien der ungespiegelten Flamme d. h. der *einfachen* Schicht, mit denen der durch Spiegelung *verdoppelten* Schicht.<sup>2)</sup> Bezeichnet  $J$  die Intensität der einfachen,  $J'$  die Intensität der durch Reflexion verdoppelten Schicht, so erhält man

$$J' = J + J \cdot R(1 - A_L),$$

$$\frac{J'}{J} = 1 + R(1 - A_L) = k',$$

1) Versuche, die Funktion  $k = f(J)$  am Bogen zu bestimmen, sind in Vorbereitung.

2) Vgl. H. Kohn und H. Jakob, Phys. Ztschr. 27. S. 819. 1926 und H. Jakob, Ann. d. Phys. 86. S. 449. 1928.

wobei  $R$  das Reflexionsvermögen des Spiegels ist. Aus dem experimentell bestimmten  $k'$  und dem ebenfalls experimentell ermittelten Wert des Reflexionsvermögens  $R$  läßt sich dann der auf S. 600 definierte Wert von  $k$  berechnen.

$$k = 2 - A_L$$

also

$$k = 1 + \frac{k' - 1}{R}.$$

Nachdem Vorversuche an einem in Luft brennenden Bogen mit einem Magnaliumspiegel die Möglichkeit solcher Messungen erwiesen hatten, wurde ein den bisher verwendeten Lampengefäßen analoges hergestellt, dessen beide Tuben aber in einer Achse lagen. Die Anordnung blieb die gleiche wie bisher, es wurde nur noch zur  $k$ -Messung ein Teil angegliedert. Fig. 17 gibt über diesen Teil Rechenschaft. Wie vorher (Fig. 6) trifft



Fig. 17

die Strahlung des Bogens auf die Linse  $L_1$ , die ein scharfes Bild des Bogens auf der Blende  $BI$  entwirft. In derselben Achse tritt aber auf der anderen Seite des Bogens nach hinten, und zwar unter gleichem räumlichen Winkel und aus einem gleichen Tubus, ein gleiches Lichtbündel wie nach vorn aus, das auf die Quarzlinse  $L_6$  trifft. Diese Linse hat von dem Bogen einen Abstand, der für  $\lambda = 3303 \text{ \AA}$  gerade gleich der Brennweite ist, so daß das Licht dieser Wellenlänge parallel aus  $L_6$  austritt. Dicht hinter der Linse befindet sich ein Magnaliumspiegel, der die Aufgabe hat, das Licht der ultravioletten Linie in sich selbst zu reflektieren, so daß es genau wieder am Ort des Bogens konzentriert wird. Die Justierung ließ sich ausgezeichnet durchführen. Man konnte sehr gut die Stelle der reflektierten Kohlenspitzen auf der Blende  $BI$ , ebenso den reflektierten Bogen sehen und regulierend einstellen. Da die Linse  $L_6$  in einer Distanz vom Bogen stand, die der Brennweite der Linse für  $\lambda = 3303 \text{ \AA}$  entspricht, war das reflektierte

sichtbare Bild etwas unscharf und verkleinert. Damit kein Licht vom reflektierten Krater auf die Platte gelangte, mußte der Bogen etwas länger gewählt werden, als vorher üblich. Dadurch wurde die Konstanz der Intensität vermindert. Es wurden deshalb die Belichtungszeiten möglichst klein gehalten, und 4 Aufnahmen auf die Platte gebracht, zwischen denen geeignet zu mitteln war. Das Aufnahmeschema war folgendes:

I. einfache Bogenschicht	} bei gleicher Spaltweite und Belichtungszeit.
II. verdoppelte        "	
III. einfache         "	
IV. verdoppelte       "	

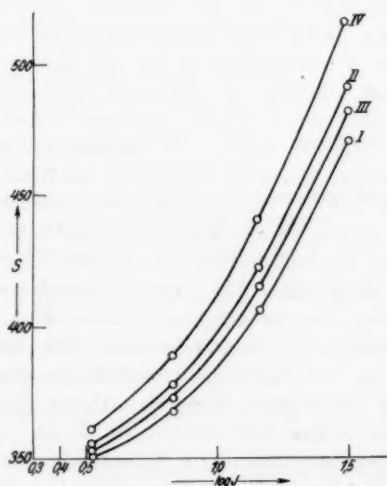


Fig. 18

Die Justierung wurde nach dem Zünden vorgenommen; bei den Aufnahmen ohne Spiegelung blieb der Spiegel zugedeckt. Die Fig. 18 zeigt die Schwärzungskurven einer Platte nach obigem Schema. Aus diesen ersieht man tatsächlich eine Intensitätszunahme des Bogens während der 4 Aufnahmen, denn die den ungespiegelten Aufnahmen entsprechenden Kurven 1 und 3, die den gespiegelten entsprechenden 2 und 4

müßten bei absoluter Konstanz zusammenfallen. Da die Intensitätszunahme auch nicht gleichmäßig vor sich ging, wurde bei diesen Platten ein doppeltes Mittelungsverfahren eingeschlagen. Vier Platten lieferten die folgenden Werte:

$$\begin{array}{ll} k' = 1,25 & k' = 1,22, \\ k' = 1,26 & k' = 1,24. \end{array}$$

Der Mittelwert ist  $k' = 1,24$ . Um nun von dem  $k'$ -Wert auf den eigentlichen  $k$ -Wert zu gelangen, mußte das Reflexionsvermögen für  $\lambda = 3303 \text{ \AA E}$  bestimmt werden. Hierbei ist zu bedenken, daß es sich nicht *allein* um das Reflexionsvermögen des Spiegels handelt, sondern daß in diesem Begriff alle anderen Strahlungsverluste mit eingehen, die das Licht auf dem Wege von den Kohlen zum Spiegel und zu den Kohlen zurück an den Verschußplatten und der Linse erleidet. Die Größe  $R$  muß deshalb an derselben Apparatur bestimmt werden, mit der die  $k'$ -Werte gemessen worden sind. Das geschah auf folgende Weise: ein Nernstfaden wurde in das Innere der Lampe gebracht, genau an die Stelle des Bogens und sorgfältig auf die Zentralachse des abbildenden Systems einjustiert, d. h. also, es wurde auf der 3 mm hohen und 15 mm breiten Blende ein scharfes Bild entworfen. Diese Blende ließ also nur ein Mittelstück des ganzen Nernstfadens von 3 mm Länge hindurch. (Da die abbildende Linse  $L_1$  kein Achromat war, so liegt eigentlich das ultraviolette Bild des Bogens vor der Blende, und die ultravioletten Strahlen gehen etwas divergent durch die Blende hindurch. Dieser Sachverhalt lag aber bei allen Aufnahmen vor.) Die Linse  $L_6$  wurde so justiert, daß der Nernstfaden im Brennpunkt für die Wellenlänge  $\lambda = 3303 \text{ \AA E}$  stand. Der Spiegel wurde zunächst so eingestellt, daß auf der Blende das unscharf verbreiterte, sichtbare, reflektierte Bild symmetrisch auf dem direkten Nernstfadenbild lag. Darauf wurde der Nernstfaden um 1 mm seitlich aus der Achse gerückt. Auf diese Weise kam sein durch  $L_6$  und Spiegelung erzeugtes Bild in ebenfalls 1 mm Abstand von der Achse auf der anderen Seite zu liegen, und beide ultravioletten Bilder, das direkte wie auch das gespiegelte lagen symmetrisch zur Mittellinie der Blende. In dieser Justierung wurde eine Aufnahme mit bedecktem, und eine mit abgedecktem Spiegel

gemacht. Der Nernstfaden wurde systematisch einmal auf die eine, dann auf die andere Seite aus der Achse gebracht, auch um  $180^\circ$  gedreht, und schließlich auch um 2 bzw. 3 mm aus der Achse entfernt. Es ergab sich in allen Fällen das gleiche Resultat für  $R$ . Die erste Aufnahme liefert  $J$ , die zweite  $J' = J + J \cdot R$ , so daß

$$R = \frac{J'}{J} - 1$$

ist.

Die nachfolgende Tab. 7 gibt die erhaltenen Werte mit dem Mittelwert  $R = 45$  Proz.

Tabelle 7

45,2 %	42,9 %	46,2 %
46,2 %	45,6 %	43,6 %

Mit Hilfe dieses Wertes erhält man aus  $k' = 1,24$  den gesuchten  $k$ -Wert zu  $k = 1,53$ . Damit ist der gesuchte Faktor  $L$  (Rechnung bereits auf S. 605) zu  $\frac{1}{1,48}$  bestimmt.

#### IV. Ausrechnung des Intensitätsverhältnisses;

##### Diskussion des Ergebnisses

In der maßgebenden Gleichung von S. 597:

$$V = \frac{J_{uv}}{J_g} = \left( \frac{J_{uv}}{J_g} \right)' \cdot S_R \cdot S_M \cdot D \cdot L \cdot \left( \frac{a}{b} \cdot v_T \right)$$

sind nunmehr alle Größen bestimmt. Setzt man der Reihe nach die erhaltenen Werte ein, nämlich

$$\left( \frac{J_{uv}}{J_g} \right)' = 1,05, \quad S_R = \frac{1}{1,46}, \quad S_M = \frac{1}{2}, \quad D = \frac{1}{4,2},$$

$$L = \frac{1}{1,48}, \quad \frac{a}{b} \cdot v_T = 64,4,$$

so ergibt sich

$$V = 3,72.$$

Mit Hilfe dieses Wertes läßt sich das gesuchte Verhältnis der Ü.-W. berechnen. Es ist laut Definition das Intensitätsverhältnis

$$V = \frac{a_{2S-3P} \cdot v_{2S-3P}}{a_{1S-3P} \cdot v_{1S-3P}} = \frac{a_{2S-2P} \cdot \lambda_{1S-3P}}{a_{1S-3P} \cdot \lambda_{2S-3P}},$$

also

$$\frac{a_{2S-3P}}{a_{1S-3P}} = V \cdot \frac{\lambda_{2S-3P}}{\lambda_{1S-3P}} = 24,9.$$

Für das Verhältnis der U.-W. der ultraroten Linie zur ultravioletten Linie erhält man also den Wert

$$\underline{25:1};$$

bei seiner Ermittlung — hierauf sei nochmals hingewiesen — wurde die spezielle Gouysche Kurve für die Linienabsorption in der Flamme verwendet.

Wie groß ist der maximale Fehler anzusetzen? Wir haben bereits die Fehlergrenzen bei den einzelnen Faktoren vermerkt.

$\left(\frac{J_{ur}}{J_g}\right)'$  ist mit einem max. Fehler von 25 Proz. behaftet,

$S_M$  ist mit einem max. Fehler von 5 Proz. behaftet,

$\frac{a}{b}$  ist mit einem max. Fehler von 8 Proz. behaftet.<sup>1)</sup>

Für  $L$  erhält man aus den größten Abweichungen der  $k'$ - und  $R$ -Werte mit Hilfe der Gouy-Kurve einen maximalen Fehler von 8,5 Proz.

Um den maximalen Fehler in dem berechneten Verhältnis  $v_T$  abzuschätzen, wird der Einfluß von Fehlern in der Temperatur- und Wellenlängenbestimmung auf den Wert des Verhältnisses  $v_T$  untersucht. Zu diesem Zweck bildet man aus

$$v_T = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{-5} \cdot e^{-\frac{c_2}{T}} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)$$

den totalen Zuwachs von  $v_T$ , nämlich

$$dv = \frac{\partial v}{\partial \lambda_1} \cdot d\lambda_1 + \frac{\partial v}{\partial T} \cdot dT.$$

Zunächst ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial T} &= \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{-5} \cdot \frac{c_2}{T^2} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) \cdot e^{-\frac{c_2}{T}} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) \\ &= v \cdot \frac{1}{T} \cdot \frac{c_2}{T} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = v \cdot \frac{1}{T} \cdot 10. \end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \lambda_1} &= -5 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{-6} \cdot \frac{1}{\lambda_2} \cdot e^{-\frac{c_2}{T}} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) \\ &\quad + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{-5} \cdot e^{-\frac{c_2}{T}} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) \cdot \frac{c_2}{\lambda_1^2 \cdot T} \\ &= v \cdot \frac{1}{\lambda_1} \left(\frac{c_2}{\lambda_1 \cdot T} - 5\right) = v \cdot \frac{1}{\lambda_1} \cdot 11, \end{aligned}$$

1) Bei der Bestimmung des maximalen Fehlers von  $a/b$  sind die beiden herausfallenden Werte nicht berücksichtigt worden. Die Abweichung dieser beiden Werte, die sich in ihrem Einfluß auf die Mittelbildung gerade aufheben, ist jedenfalls durch Bogenstörungen bedingt.

also ist

$$dv = v \cdot \frac{dT}{T} \cdot 10 + v \cdot \frac{d\lambda_1}{\lambda_1} \cdot 11$$

oder

$$\frac{dv}{v} = \frac{dT}{T} \cdot 10 + \frac{d\lambda_1}{\lambda_1} \cdot 11.$$

Läßt man einen maximalen Irrtum von  $5^\circ$  in der Temperatur zu, etwa infolge von Abweichungen der Spannungstemperaturkurve des Thermoelements von der Eichkurve der P.T.R., so wäre  $dT/T$  etwa gleich 3 Promille, also

$$\frac{dT}{T} \cdot 10 = 3 \text{ Proz.}$$

Bei dem Vergleich der Schwärzungen unter dem Photometer ist ein Abweichen von dem der Linie genau entsprechenden Spektralbezirk höchstens um die halbe Linienbreite = 0,15 mm möglich. Dem entspricht nach der Dispersionskurve eine Verschiebung von höchstens 10 ÅE im Grün, d. h.  $d\lambda_1/\lambda_1$  ist etwa gleich 1,8 Promille und daher

$$\frac{d\lambda_1}{\lambda_1} \cdot 11 = 2 \text{ Proz.}$$

Die Dispersion im Ultraviolett ist so groß, daß man den durch  $d\lambda_2/\lambda_2$  hereingebrachten Fehler gegen die beiden anderen vernachlässigen kann. Man erhält demgemäß

$$\frac{dv}{v} = 3 \text{ Proz.} + 2 \text{ Proz.} = 5 \text{ Proz.}$$

als resultierenden möglichen maximalen Fehler von  $v_T$ . Im ungünstigsten Fall würde durch Addition der einzelnen maximalen Fehler ein maximaler Gesamtfehler von 25 Proz. + 5 Proz. + 8 Proz. + 8,5 Proz. + 5 Proz. = 51,5 Proz. herauskommen. Man darf also sagen, daß rund gerechnet ein maximaler Gesamtfehler bis zu 50 Proz. des angegebenen Wertes des Verhältnisses der Ü.-W. möglich ist. Der mittlere Fehler ist natürlich viel kleiner (etwa  $\pm 15$  Proz.).

Das Resultat der vorliegenden Arbeit besagt nun, daß Übergänge vom 3P-Zustand nach 2S sehr viel häufiger stattfinden als solche nach 1S, und bestätigt somit die Voraussage von Bohr. Qualitativ ist zu übersehen, daß das Verhältnis kleiner als 25:1 ausfallen würde, wenn die auf Rayleighscher Verteilung basierende Funktion  $k = f(J)$  zugrunde gelegt würde, die beim Lichtbogen der Wahrheit wohl näher kommen

könnte als die Gouysche Funktion für die Flamme. Auch die Berechnung der  $\ddot{U}$ -W. des Natriumatoms von Bartels<sup>1)</sup> unter Verwendung des Fuessschen Zentralkraftmodells und der Methoden des Korrespondenzprinzips ergibt, daß die Übergänge nach 2S häufiger als die nach 1S stattfinden; indessen ist das berechnete Verhältnis der  $\ddot{U}$ -W. (4:1) bei weitem nicht so groß, wie das von mir experimentell gefundene (25:1). Zur weiteren Klärung habe ich die Ausmessung der Gouykurve für die von mir benutzte Lichtquelle in Angriff genommen. — Aus den auf S. 575 angegebenen Gründen ist über die dritte  $\ddot{U}$ -W.  $a_{3D-3P}$  eine exakte Aussage noch nicht möglich. Sie ist aber sicher kleiner als  $a_{2S-3P}$ .

Die vorliegende Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Universität Breslau in den Jahren 1924—1928 durchgeführt. Sie wurde auf Veranlassung von Hrn. Prof. Ladenburg-Berlin in Angriff genommen. Für diese Anregung spreche ich ihm meinen besten Dank aus. — Nach seinem Fortgang im Sommer 1924 übernahm Frl. Dr. Kohn die Leitung der Arbeit. Ihr bin ich für förderndes Interesse und große Anteilnahme an dem Fortgang meiner Untersuchungen außerordentlich zu Dank verpflichtet; insbesondere verdanke ich ihr die Anregung zur Konstruktion der Lichtquelle und zu den Messungen der Linienabsorption. — Den jeweiligen Institutsdirektoren, Hrn. Geheimrat Prof. Dr. Lummer(†), Hrn. Prof. Dr. Waetzmann und Hrn. Prof. Dr. Schaefer danke ich für die großzügige Bereitwilligkeit, mit der sie mir die Mittel des Instituts zur Verfügung stellten.

Der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft und der Helmholtz-Gesellschaft bin ich für die Überlassung von Apparaten zu den Zwecken meiner Arbeit ebenfalls zu großem Dank verpflichtet.

Der Linde-Gesellschaft danke ich für das gelieferte Argon und den Planiawerken für die Herstellung der Kohleelektroden.

Gießen, Physikalisches Institut, Januar 1929.

1) H. Bartels, *Ztschr. f. Phys.* 32. S. 415. 1925.

(Eingegangen 15. Januar 1929)



## *Über eine neue erschütterungsfreie Aufstellung für empfindliche Meßinstrumente*

*Von Rudolf Müller*

(Mit 6 Figuren)

Inhalt: 1. Einleitung. — 2. Erschütterungsmesser. Theorie von Rubens und Du Bois. — 3. Die Juliussche Aufhängung. — 4. Versuche mit Stab- und Kombinationsaufstellungen. — 5. Das Dämpfungsproblem. Dämpfung durch innere Reibung von Flüssigkeiten. — 6. Beschreibung eines Modells der erschütterungsfreien Stabaufstellung. — 7. Zusammenfassung. — 8. Literaturverzeichnis.

### 1. Einleitung

Die Frage, wie man die frei hängenden Systeme empfindlicher Meßinstrumente vor den Bodenerschütterungen bewahren kann, wird in der Literatur zum erstenmal um die Mitte des vorigen Jahrhunderts aufgeworfen. Die starke Entwicklung des gesamten Verkehrs brachte es mit sich, daß die wissenschaftlichen Institute erheblichen mechanischen Einflüssen ausgesetzt wurden. Gleichzeitig nahmen die Dimensionen und das Gewicht der in den Instrumenten verwendeten Systeme immer mehr ab, so daß bei vielen Apparaten die schlechte Ruhelage überhaupt keine genauen Messungen mehr gestattete, mindestens aber das Ablesen sehr erschwert wurde.

Eine erschütterungsfreie Aufstellung hat natürlich auch für Apparate anderer Bauart eine Bedeutung, z. B. für solche, bei denen es zum Zwecke genauer Messungen erwünscht ist, eine möglichst ruhige Oberfläche von Flüssigkeiten herzustellen, wie beim Kapillarelektrometer. Hier sind aber unter „Meßinstrumenten“ nur solche Apparate verstanden, bei denen ein an einem Faden aufgehängtes System, das mit Spiegelablesung versehen ist, Drehungen um die Vertikale und Pendelschwingungen in einer vertikalen Ebene ausführen kann (Galvanometer, Mikroradiometer). Dabei sei über die Form und

Dämpfung des Systems zunächst nichts vorausgesetzt. In vielen Fällen wird dann eine bestimmte Form der Aufstellung auch für Instrumente anderer Bauart mit Erfolg verwendbar sein; jedoch müssen hierüber erst Einzelversuche entscheiden.

Du Bois und Rubens 3)<sup>1)</sup> versuchten 1893, gelegentlich der Konstruktion eines Galvanometers, diesem Übelstand wenigstens bei der Herstellung von neuen Instrumenten dadurch zu begegnen, daß sie auf Grund mathematisch-physikalischer Überlegungen für die Anfertigung leichter Systeme gewisse allgemeine Richtlinien aufstellten, die sich auf Form und Anordnung der Systemteile beziehen. Diese Bedingungen sind noch heute von größter Wichtigkeit; jedoch sind ihrem Einhalten in der Praxis bestimmte Grenzen gesetzt, was sich namentlich bei sehr leichten und kleinen Systemen störend bemerkbar macht.

Es erwies sich daher mehr und mehr als ein wichtiges Problem, Vorrichtungen zu ersinnen, die die Aufgabe haben, die auf ein Instrument wirkenden mechanischen Kräfte möglichst stark zu schwächen und dadurch indirekt die Genauigkeit der Messungen zu erhöhen. Man versuchte, durch elastische Unterlagen oder Stützen, durch Anwendung von Federn oder durch Schwimmenlassen des Instruments auf einer Flüssigkeit Abhilfe zu schaffen. Der Erfolg war wechselnd.

Der erste, der eine ausführliche, auch die quantitativen Verhältnisse berücksichtigende Zergliederung der auf ein Instrument wirkenden mechanischen Kräfte versuchte, war Julius 4), 6), 13) (1895). Er gab gleichzeitig eine relativ einfache Vorrichtung an, die die Apparate vor mechanischen Einflüssen weitgehend schützte. Diese Vorrichtung ist heute unter dem Namen „Juliussehe Aufhängung“ allgemein bekannt. Trotz anderer vorgeschlagener Schutzmaßnahmen ist — wenigstens in Deutschland — die Juliussehe Aufhängung bisher das Universalmittel zur Beseitigung mechanischer Störungen geblieben; und verschiedene Vorschläge, die zu ihrer Verbesserung angegeben wurden, haben in der Praxis mehr geschadet als die Aufhängung leistungsfähiger gemacht.

---

1) Die Zahlen 3) usw. weisen auf entsprechend bezifferte, im Literaturverzeichnis aufgeführte Originalarbeiten hin.

Die Juliussche Aufhängung hat, neben später zu erörternden Mängeln, den Nachteil, daß sie nicht aufgestellt werden kann, sondern an drei — zwei bis drei Meter langen — Drähten hängt, die an einem stabilen Wandbrett oder an der Zimmerdecke befestigt werden müssen. Sie kann daher in manchen Räumen wegen ungeeigneter lokaler Verhältnisse entweder gar nicht oder nur unter Schwierigkeiten Verwendung finden. Ferner ist sie, was manchmal recht störend ist, nicht ohne weiteres transportabel. Schließlich ist sie sehr empfindlich gegen Luftströmungen; dazu kommt, daß, wenn man die Aufhängung mit einem absolut dichten Luftschutz umgeben will, man die Drähte mit meterlangen Röhren umschließen muß. Diese ziemlich umständliche Anordnung ist z. B. dann nötig, wenn man das Instrument in trockener Luft halten will. In der Dämpfung der Eigenschwingungen, der Aufstellung des Instrumentes, der Art der Drähte, der Belastung und der Befestigungsweise der Aufhängung konnte man mit einer gewissen Willkür verfahren. Man mußte also erst probieren, ob eine bestimmte Ausführung der Aufhängung an einem bestimmten Orte speziellen Anforderungen Genüge leistete. — Die anderen angegebenen Vorrichtungen haben, soweit sie in ihrer Wirkung überhaupt mit der Juliusschen Aufhängung vergleichbar sind, teils ähnliche Mängel wie diese, teils sind sie nur für Instrumente von bestimmter Bauart verwendbar.

Diese Verhältnisse führten zu der Frage, ob es möglich sei, mit einfachen Mitteln eine leicht transportable und bequem zu handhabende Vorrichtung zu konstruieren, die nicht an Drähten aufgehängt ist, sondern auf einem festen Fußboden oder Tisch aufgestellt werden kann, und die in bezug auf Verringerung der mechanischen Erschütterungen mindestens daselbe leistet wie die Juliussche Aufhängung. Dieses Ziel lag den in den folgenden Abschnitten besprochenen Versuchen zugrunde. Hierbei ergaben sich beim Arbeiten mit der als Ausgangspunkt dienenden Juliusschen Aufhängung gewisse Erfahrungen und Methoden, durch deren Anwendung die Leistungsfähigkeit dieser Aufhängung noch, manchmal sogar erheblich, gesteigert werden kann. Diese Tatsache war besonders für das hiesige physikalische Institut von großem Interesse, das wohl heute zu den durch den Großstadtverkehr

am meisten betroffenen Instituten Deutschlands gehört, und in dem selbst die Juliussche Aufhängung zuweilen versagte.

Um das gestellte Problem lösen zu können, war es notwendig, zunächst Erfahrungen über die Wirkungsweise der schon vorhandenen Hilfsmittel zu sammeln. Die Arbeiten begannen daher mit einer kritischen Sichtung und einer experimentellen Nachprüfung der bisher in der Literatur angegebenen Vorschläge zur Beseitigung von Erschütterungen. Dabei konnten manche als für den praktischen Gebrauch wenig oder gar nicht geeignete Vorrichtungen bald ausgeschieden werden. Eine besonders ausführliche Behandlung erfuhr das Dämpfungsproblem, d. h. die Frage, wie man die (z. B. auch durch ganz geringe Luftströmungen) angeregten Eigenschwingungen der Aufhängung wirksam dämpfen kann, ohne schädliche sekundäre Effekte hervorzurufen. Eine befriedigende Lösung dieser Aufgabe führte, in Gemeinschaft mit anderen experimentellen Ergebnissen, zu einer Verbesserung der Juliusschen Aufhängung; schließlich konnte auf Grund der gesammelten Erfahrungen und unter Verwendung von teilweise neuen Prinzipien eine Aufstellung konstruiert werden, die in wesentlichen Punkten den oben erwähnten Anforderungen entspricht und geeignet ist, in vielen Fällen die Juliussche Aufhängung vollständig zu ersetzen.

Die meisten Versuche wurden in einem zu ebener Erde liegenden, mit Steinfußboden ausgestatteten Zimmer (Raum E) ausgeführt, das einzeln in den Hof des Instituts hinausgebaut ist. Auf andere noch benutzte Räumlichkeiten ist im folgenden besonders verwiesen.

Es sei noch hervorgehoben, daß im folgenden alle Größen, wenn nicht ausdrücklich anders bemerkt, im absoluten (c-g-s)-System ausgedrückt sind. Unter der Schwingungsdauer eines Systems ist stets die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Umkehrpunkten des Systems verstanden.

## 2. Erschütterungsmesser. Theorie von Rubens und Du Bois

Bevor an eigentliche Experimente zur Lösung der gestellten Aufgabe gegangen werden konnte, mußte versucht werden, mit einfachen Mitteln eine Art Erschütterungsmesser herzustellen, der wenigstens qualitativ anzeigte, ob die rest-

lichen Erschütterungen einer bestimmten Vorrichtung größer seien als die einer anderen. Von diesem Erschütterungsmesser war zu verlangen, daß er in bezug auf mechanische Störungen empfindlicher sei als die in den modernen Instrumenten verwendeten leichten Systeme, insbesondere die der Galvanometer, daß er aber unempfindlich sei in bezug auf magnetische Einflüsse jeder Art, sowie auf Wärmewirkungen und Luftströmungen.

Hier liefert die Theorie von Rubens und Du Bois ein einfaches, aber wichtiges Hilfsmittel. Diese, von Rubens bei der Konstruktion seiner Galvanometer berücksichtigte Theorie stellt an ein in bezug auf Erschütterungen unempfindliches System folgende zwei Bedingungen:

1. Das System muß völlige Trägheitssymmetrie um die Verlängerung des Aufhängefadens aufweisen, damit die (gewöhnlich einem Minimum des Trägheitsmomentes entsprechende) Hauptträgheitsachse des Systems in die Verlängerung des Fadens falle und daher bei einer horizontalen Translationsbewegung des Aufhängepunktes keine Rotationsschwingungen des Systems um die Vertikale auftreten.

2. Am System befestigte, dünne flache Gebilde sollen in zwei senkrechten Ebenen ungefähr gleiche Flächenausdehnung besitzen, damit bei Pendelschwingungen des Systems infolge asymmetrischen Luftwiderstands keine Drehungen um die Vertikalachse stattfinden.

Was zunächst die zweite Bedingung anlangt, so läßt sich die Frage, ob die durch asymmetrischen Luftwiderstand hervorgerufenen Rotationen wirklich sich bemerkbar machen, nicht allgemein beantworten, da hier verschiedene, mit jedem Instrument wechselnde Faktoren, z. B. das Gewicht des Systems, mitsprechen. In der Literatur wird nirgends auf die zweite Bedingung eingegangen. Jedoch wird man auch ohne eingehende Versuche sagen können, daß bei einem auf einer guten erschütterungsfreien Aufstellung stehenden Instrument die zweite Bedingung von untergeordneter Bedeutung ist; denn die restlichen Impulse, die dann das Instrument erhält, sind so gering, daß der Luftwiderstand bei den kleinen Pendelschwingungen sich kaum bemerkbar machen dürfte.

Sehr wichtig ist dagegen die erste Bedingung. Wenn den Aufhängepunkt des Systems ein horizontal gerichteter Impuls trifft, so wird, wenn die Hauptträgheitsachse in die Fadenverlängerung fällt, nur eine Verschiebung des Schwerpunktes eintreten. Das System gerät dann in Pendelschwingungen, von denen man die Komponente parallel zum Spiegel im Fernrohr nicht bemerkt, während die Komponente senkrecht zum Spiegel vertikale Erzitterungen im Fernrohr verursacht. Trifft dagegen der Impuls nicht die Hauptträgheitsachse, so muß außerdem immer ein Drehmoment um die Vertikale eintreten. Diese Rotationen des Systems sind im Fernrohr als horizontale Schwingungen sichtbar und sind für das Ablesen am schädlichsten.



Fig. 1

Bildet umgekehrt die Trägheitsachse einen Winkel mit der Vertikalen, so ist das System in bezug auf Erschütterungen empfindlich. Dies kann man auf verschiedene Weise erreichen. Fig. 1 zeigt das allen Untersuchungen zugrunde gelegte System, das sich durch besondere Einfachheit und große Empfindlichkeit auszeichnet. In dem System ist ein 0,8 mm dicker Kupferdraht so gebogen, daß die einem Minimum des Trägheitsmoments entsprechende Hauptträgheitsachse einen merklichen Winkel mit der Vertikalen bildet, so daß also die erste Bedingung absichtlich verletzt ist. Die Länge des Systems betrug ungefähr 10 cm. In der Figur bedeutet *Sp* einen kleinen Planspiegel, der mittels eines leichten Aluminiumgestells an dem Kupferdraht befestigt ist. *Q* ist der Befestigungspunkt des Quarzfadens, an dem das System hing. Eine unten angebrachte Aluminiumscheibe *A* konnte durch Senken des ganzen Systems, das sich zum Schutz gegen Luftströmungen in einer zylindrischen, vorn mit einer Glasscheibe versehenen Messingröhre befand, nahe an den Boden des mit drei Stellschrauben versehenen Apparates gebracht werden, wodurch eine ganz geringe Luftdämpfung erzielt wurde. In der Regel wurde aber auf eine Dämpfung ganz verzichtet. Bei 3,5 m Skalenabstand zeigte das System, auf einem zu den meisten Versuchen verwendeten Wandtisch aufgestellt, im

Fernrohr horizontale Schwingungen bis 2 mm und vertikale Schwingungen bis 3 mm, wobei sich die für Erschütterungen typischen unaufhörlichen kleinen sehr schnellen Schwingungen überlagerten, so daß ein Ablesen, auch nur näherungsweise, vollständig ausgeschlossen war.

Hierbei stand das System im Raum *E* auf einem sehr stabilen Wandtisch, wobei noch erwähnt werden soll, daß dieser Raum bei weitem nicht der am meisten mechanisch erschütterte Raum des Instituts ist. Das Gewicht des Systems betrug 0,92 g, sein aus Schwingungsbeobachtungen ermitteltes Trägheitsmoment in bezug auf die Vertikalachse rund 0,14. Fig. 1 zeigt, daß *dann* Drehungen um die Vertikale erfolgen, wenn der Punkt *Q* einen Impuls senkrecht zum Spiegel bekommt. Da man annehmen muß, daß die Erschütterungen von allen Seiten kommen, und da das System infolge des Fehlens einer Dämpfung in ständiger Bewegung ist, so werden auch immer solche Impulse auftreten, so daß das System auf alle in Frage kommenden Komponenten der Erschütterungen anspricht. Da das System der Einfachheit halber keine Arretierung besaß, konnte es bei der starken Inanspruchnahme des Instruments nicht vermieden werden, daß der Faden ab und zu erneuert werden mußte. Während sich die Dauer der Pendelschwingungen des Systems dadurch nicht ändern konnte, betrug die Rotationsschwingungsdauer je nach den Umständen 4—8 Sekunden. Eine Veränderung der Empfindlichkeit des Systems war aber nicht nachzuweisen.

Das System wurde auf die verschiedenen Anordnungen gesetzt, und bei bestimmtem Skalenabstand wurden die Schwingungen des Systems mit dem Fernrohr beobachtet. In den Tabellen ist der Maximalausschlag angegeben, d. h. die größte (im ungünstigsten Falle gemessene) Entfernung zweier aufeinanderfolgender Umkehrpunkte im Fernrohr, gemessen in Millimetern. Betrug diese Entfernung z. B. 1 mm, so wurde als Maximalausschlag  $\pm 0,5$  mm angegeben. Handelte es sich um wichtige vergleichende Messungen, so wurden die stets längere Zeit dauernden Beobachtungen zu verschiedenen Tageszeiten wiederholt. Eine längere Zeit, etwa eine halbe Stunde lang, dauernde absolute Ruhelage hat das System auf keiner Anordnung erreicht, ein Beweis für seine Empfindlichkeit.



Die Angabe des Maximalausschlags genügte, wie sich zeigte, zur Charakterisierung der Leistungsfähigkeit einer Aufstellung. Im allgemeinen zeigte es sich, daß die Periode der restlichen kleinen Rotationen um die Vertikale übereinstimmte mit der Periode der Pendelschwingungen des Systems. Bei noch größeren mechanischen Störungen als die hier im Institut auftretenden (die in der Praxis selten vorkommen werden) würde eine Erhöhung der Maximalausschläge eintreten; denn es handelt sich bei jeder erschütterungsfreien Aufstellung nur darum, die mechanischen Kräfte möglichst zu schwächen. Vollständig beseitigen kann man sie natürlich nicht. Deshalb wird auch die beste erschütterungsfreie Aufstellung unbrauchbar, wenn man die Erschütterungen hinreichend vergrößert.

Es war noch von Interesse zu berechnen, um welchen Winkel sich das System infolge der Brownschen Molekularbewegung dreht, und ob dieser Winkel vergleichbar ist mit den Winkeln, die den niedrigsten Maximalausschlägen entsprechen. Der Mittelwert<sup>1)</sup> der den Brownschen Bewegungen entsprechenden Winkel ist gegeben durch die Gleichung

$$\overline{\varphi^2} = \frac{k \cdot T}{A},$$

in der  $k$  die Boltzmannsche Konstante,  $T$  die in absolutem Maß gemessene Zimmertemperatur,  $A$  die Direktionskraft des Fadens bedeutet. Aus diesen Größen ergab sich:

$$\sqrt{\overline{\varphi^2}} = 7,48 \cdot 10^{-7},$$

was bei 4 m Skalenabstand einem horizontalen Ausschlag von etwa 0,006 mm im Fernrohr entspricht. Kennt man  $\overline{\varphi^2}$ , so kann man unter Verwendung der Gauss'schen Fehlerfunktion die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen, daß sich der Spiegel um Winkel dreht, die größer sind als ein bestimmter Winkel  $\varphi_1$ . Diese Wahrscheinlichkeit ist gegeben durch den Ausdruck

$$1 - \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varphi_1} e^{-h^2 \varphi^2} \cdot d\varphi,$$

wobei

$$h^2 = \frac{1}{2\overline{\varphi^2}}.$$

1) Vgl. z. B. Ising, A natural limit for the sensibility of galvanometers (Phil. Mag. 1. S. 827. 1926).



Entspricht nun z. B.  $\varphi_1$  einer horizontalen Abweichung von 0,01 mm im Fernrohr, so zeigt die Rechnung, daß die Wahrscheinlichkeit des Eintretens größerer Ausschläge enorm gering ist. Da die Maximalausschläge stets größer waren als 0,01 mm, kann gesagt werden, daß sie nicht auf Brownsche Molekularbewegungen zurückzuführen sind.

### 3. Die Juliussche Aufhängung

Die Experimente mit der Juliusschen Aufhängung dienten dem Zweck, zunächst über ihre Leistungsfähigkeit etwas Genaueres aussagen zu können, zweitens durch planmäßige Abänderung ihrer Teile eine Übersicht über die für ihre Wirkungsweise wesentlichen Faktoren zu gewinnen und schließlich einige in der Literatur auftretende Widersprüche zu klären. Die gewonnenen Erfahrungen lieferten bestimmte Vorschläge zu Verbesserungen und bildeten andererseits die Grundlage für die Konstruktion der später beschriebenen neuen Aufstellung.

Die Juliussche Aufhängung besteht aus einem an drei Stahldrähten von 2—3 m Länge hängenden Gestell, das in der Praxis vielfach durch zwei kreisförmige, starke Holzbretter, die durch drei Metallstäbe verbunden sind, dargestellt wird. Die Befestigungspunkte des Gestells, der Aufhängepunkt des Systems und der Schwerpunkt der ganzen Aufhängung sollen möglichst in einer Ebene liegen. Die Drähte sollen durch das Gewicht der Aufhängung merklich verlängert sein. Die dreiteilige Dämpfung der Eigenschwingungen soll in der Schwerpunktebene erfolgen und durch in Ölfäße tauchende Blechflügel oder durch lockere Wattebüschel, die auf einer festen Unterlage schleifen, bewerkstelligt werden. Vorausgesetzt ist ferner genau gleiche Drahtlänge und zentrale Aufstellung des Instruments. Weitere Vorschriften über die zu benutzenden Dimensionen, z. B. über die Dicke der Drähte, werden nicht gegeben.

Nach Julius entstehen bei horizontalen Bewegungen der Aufhängepunkte der Drähte Transversalwellen, die oben mit gleicher Phase beginnen und unten fast ungeschwächt reflektiert werden. Julius berechnet aus dem Gewicht und der Neigung der Welle die geringe Kraft, die auf den unteren Endpunkt des Drahtes wirkt. Daß die Wellen mit ungleicher

Phase unten ankommen, sucht er durch die gleiche Länge der Drähte zu vermeiden, so daß keine Rotationen des Gestells um die Vertikale eintreten. Die vertikalen Komponenten werden durch die Dehnung der Drähte geschwächt. Schnelle, um eine horizontale Achse durch den Schwerpunkt erfolgende Schwingungen werden durch Aufstellung des Instruments im Schwerpunkt unschädlich gemacht.

Die im Verlaufe der Untersuchungen zunächst rein experimentell gefundenen Ergebnisse können in folgende wichtige Punkte zusammengefaßt werden:

1. Die Forderung, daß Schwerpunkt der ganzen Aufhängung und Aufhängepunkt des Systems in der Ebene der drei Befestigungspunkte der drei Drähte liegen sollen, ist prinzipiell richtig, aber um so weniger von Bedeutung, je dicker und weniger verlängert die Drähte sind. Auch die Forderung, daß das Instrument in der vertikalen Achse des Gestells stehen soll, braucht dann nicht streng innegehalten zu werden.

2. Man verwendet zweckmäßig weichen Eisendraht, der durch das Gewicht der Aufhängung zwar gespannt, aber nicht merklich verlängert sei.

3. Die Drahtlänge darf einen gewissen Betrag, etwa 150 cm, nicht unterschreiten.

4. Auf Stabilität des Gestells ist ganz besonders zu achten.

5. Keinen wesentlichen Einfluß hat die Befestigungsweise der Drähte.

6. Ein dichter Luftschutz ist auch schon bei weniger feinen Messungen von außerordentlicher Wichtigkeit.

7. Als beste Dämpfung ist die im 5. Abschnitt besprochene, auf innerer Reibung von Flüssigkeiten beruhende Dämpfung zu empfehlen. (Eine oder mehrere Schalen.) Bei Wattedämpfung können die Wattebüschel unbedenklich unten an der Peripherie angebracht werden; empfohlen werden kann eine dreiteilige Dämpfung. Im allgemeinen dürfen die Wattebüschel nur ganz lose schleifen.

Hieran seien nun folgende, sich teils aus dem Experiment, teils aus der Theorie ergebende Bemerkungen geknüpft:

Zu 1. und 2.: Jede translatorische Bewegung des Aufhängepunktes des Systems, die von analogen Bewegungen des Gestells und der Befestigungspunkte der Drähte herrührt, ist

zerlegbar in eine horizontale und eine vertikale Komponente. Hier soll zunächst nur von der Vertikalkomponente die Rede sein. Schon in der Arbeit von Du Bois und Rubens wird darauf hingewiesen, daß eine Vertikalbewegung des Aufhängepunktes nur eine unschädliche Hebung oder Senkung des Systems hervorruft, wenn das System einigermaßen den beiden bereits erwähnten Bedingungen entspricht; und in der Theorie wird diese Bewegung gar nicht berücksichtigt. Trotzdem ist, wenn auch z. B. Julius vor allem die Notwendigkeit der Beseitigung der horizontalen Komponente betont, anscheinend niemals der Versuch gemacht worden, in konsequenter Verfolgung dieser Tatsache auf eine Dämpfung der Vertikalkomponente praktisch ganz zu verzichten; im Gegenteil suchte man sich gegenseitig in einer Dämpfung dieser Komponente durch elastische Mittel, Federn usw. zu überbieten, vielfach unter Vernachlässigung der viel wichtigeren Beseitigung der horizontalen Komponente. Wenn nun bei der Juliusschen Aufhängung stark verlängerte Stahldrähte, evtl. auch Federn verwendet werden, so findet zwar sicher eine Dämpfung der Vertikalkomponente statt, aber gleichzeitig treten Schwingungen um eine horizontale, durch den Schwerpunkt gehende Achse auf, um so mehr, je elastischer die Drähte und je stärker sie gedehnt sind.

Drähte aus weichem Eisen sind aus praktischen Gründen schon öfters verwendet worden (z. B. von Rubens). Sie lassen sich leicht glatt ausziehen und knicken nicht und sind leichter zu befestigen. Sie verhindern aber auch, wie die Versuche überall bestätigen, die Ausbildung der Schwingungen um den Schwerpunkt in sehr erheblichem Maße. Eine besondere Dehnung der Drähte ist nicht nur unnütz, sondern kann schädlich wirken. Man kann, wie experimentell nachgewiesen wurde, bei Beachtung dieses Punktes den Schwerpunkt ziemlich weit in vertikaler Richtung verlegen, ohne daß eine Änderung der Ruhelage eintritt; andernfalls kann schon eine Verlegung um 2 cm in vertikaler Richtung deutliche Störungen hervorrufen. Diese Tatsache ist auch eine Erklärung dafür, daß man in Räumen, die nicht ganz extreme Erschütterungen aufweisen, vielfach gute Resultate mit einer Juliusschen Aufhängung erzielt, die nur aus einem einzigen belasteten Brett

besteht, das an starken Drähten aus weichem Eisen hängt, und zwar so, daß die Schwerpunktsbedingung ganz vernachlässigt wird.

Der Verzicht auf eine merkliche Dämpfung der Vertikal-komponente ist der erste wesentliche Punkt bei der neuen Aufstellung.

Zu 3.: Das Experiment lehrt, daß die Juliussche Aufhängung eine um so schlechtere Ruhelage zeigt, je weiter man unter eine gewisse Drahtlänge heruntergeht. Dies erklärt Julius, der zwei bis drei Meter lange Drähte empfiehlt, damit, daß bei kurzen Drähten ein einfaches Verhältnis zwischen „gewissen Hauptperioden des Gebäudes“ und der Eigenschwingung der Aufhängung besteht. Ferner behauptet Julius nicht, daß die Verwendung elastischen Materials eine unbedingte Notwendigkeit sei, sondern er gebraucht Drähte aus Gründen der Einfachheit und deshalb, weil, wie er sich selbst ausdrückt, sich dann über die Größe der noch wirkenden Kräfte etwas Näheres aussagen läßt. Das läßt die Frage berechtigt erscheinen, ob die Elastizität der Drähte wirklich ein ausschlaggebendes Moment für ein einwandfreies Funktionieren der Aufhängung bedeutet.

Während Julius die Wirkung eines Einzelimpulses auf den gespannten Draht betrachtet, soll, wie man das innerhalb kurzer Zeiten tun darf, hier eine periodische Bewegung des Aufhängepunktes angenommen und untersucht werden, in welcher Weise die Bewegung der Aufhängung von der Bewegung des Aufhängepunktes und von der Eigenfrequenz der Aufhängung abhängt. Es wird dabei keinerlei Voraussetzung über die Beschaffenheit der Drähte gemacht.

Es sei nun folgendes einfache Problem theoretisch behandelt, auf das sich alle wesentlichen Erscheinungen bei der Juliusschen Aufhängung zurückführen lassen. An einem masselosen Faden von der Länge  $l$  hänge eine Masse  $m$  (Fig. 2).

Der Faden falle in der Ruhelage mit der  $Y$ -Achse zusammen. Der Aufhängepunkt  $A$  führe in Richtung der  $X$ -Achse horizontale, rein periodische Bewegungen aus von der Form  $\xi = A \sin \omega t$ . Dann wird das — hier als ungedämpft angenommene — Pendel erzwungene Schwingungen ausführen. Die Elongation  $x$  des Pendels ist gegeben durch den Ausdruck

$$(1) \quad x = A \sin \omega t + l \sin \varphi \sim A \sin \omega t + l \varphi,$$

wenn  $\varphi$  den Winkel bezeichnet, den das Pendel mit der Vertikalen bildet. Führt man  $\varphi$  als Variable ein und benutzt man die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen zweiter Art, so ist der Ausdruck

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (L - U)}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial (L - U)}{\partial \varphi} = \Phi$$

zu berechnen. Es ergibt sich (unter Vernachlässigung der Größen zweiter Ordnung):

$$U = -mg l \cos \varphi + \text{const.},$$

$$L = \frac{m}{2} (A^2 \omega^2 \cos^2 \omega t + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2 A l \omega \dot{\varphi} \cos \omega t),$$

$$\Phi = 0.$$

Führt man noch die Eigenfrequenz des Pendels durch die Gleichung  $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$  ein, so gelangt man nach Einsetzen dieser Werte in (2) zu der Gleichung

$$(3) \quad \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \frac{\omega^2 \omega_0^2}{g} A \sin \omega t.$$

Für den Anfangszustand sei  $t = 0$ ,  $x = 0$  und  $\dot{x} = 0$ . Hieraus sind die beiden Konstanten, die im allgemeinen Integral von (3) auftreten, bestimmbar, und man erhält:

$$(4) \quad \varphi = \frac{A \omega_0^2 \omega^2 \sin \omega t}{g (\omega_0^2 - \omega^2)} - \frac{A \omega \sin \omega_0 t}{l \omega_0} - \frac{A \omega_0^2 \omega^3 \sin \omega_0 t}{g \omega_0 (\omega_0^2 - \omega^2)},$$

woraus nach (1) folgt:

$$(5) \quad x = \frac{-A}{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1} \left( \sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right).$$

Aus (5) ist zu ersehen, daß die Elongation  $x$  bei einer großen Frequenz  $\omega$  des Aufhängepunktes um so kleiner ist, je kleiner die Eigenfrequenz des Pendels  $\omega_0$  ist, je weiter also die beiden Frequenzen auseinander liegen. Diese Tatsache, angewendet auf die Juliussche Aufhängung, zeigt also, daß, um den Einfluß der horizontalen Komponente der Erschütterungen möglichst stark zu schwächen, die Aufhängung eine große Schwingungsdauer haben muß. Damit ist die Notwendigkeit von längeren Drähten bei der Juliusschen Aufhängung hinreichend erklärt. Hiermit ist zugleich ausgesprochen, daß die



Fig. 2

Elastizität keine notwendige Bedingung für die Wirkungsweise der Juliusschen Aufhängung ist, sondern die Drähte übernehmen mehr die Rolle einer möglichst geringen Koppelung des schwingenden Gestells mit dem Erdboden. Dafür spricht auch schon die erwähnte Möglichkeit einer Verwendung von relativ dicken Drähten aus weichem Eisen. Der Vorteil dieser Betrachtungsweise liegt eben darin, daß man sie auch auf Koppelungen anwenden kann, die nicht als biegsame gespannte Saiten betrachtet werden können. Die im nächsten Abschnitt beschriebenen Versuche fügen sich in diese Theorie vollständig ein.

Eine Aufhängung mit großer Translationsschwingungsdauer ist natürlich wieder empfindlicher auf Störungen von kleiner Frequenz. Diese treten aber im allgemeinen kaum auf. Daß jedoch solche Fälle vorkommen, zeigt eine im hiesigen Institut am 26. Juni 1926 abends gegen 9 Uhr gemachte Beobachtung.<sup>1)</sup> Es wurde beobachtet, daß plötzlich zwei Juliussche Aufhängungen Pendelschwingungen von mehreren Millimetern Amplitude ausführten. Dies stand jedenfalls im Zusammenhang mit den Ausläufern eines an diesem Tage erfolgten Erdbebens. Es fand also hier eine Resonanzwirkung statt. Gegen solche kleine Frequenzen, wie sie beim Erdbeben auftreten, bietet also die Aufhängung keinen Schutz.

Die Forderung einer großen Translationsschwingungsdauer in horizontaler Richtung in Verbindung mit dem Vorhandensein einer nach Möglichkeit losen Koppelung mit dem Erdboden bildet den zweiten wesentlichen Punkt der neuen Aufstellung.

Zu 4.: Schon Julius betont, daß, wenn das Gestell in sich schwingungsfähig ist, sich leicht in unübersehbarer Weise Knotenpunkte bilden können. In der Tat ist die Forderung nach großer Stabilität des Gestells außerordentlich wichtig, auch wenn man Metall verwendet. Es ist notwendig, diesen Punkt ganz besonders zu betonen. Wenn also bei einer Aufhängung nicht die gewünschte Ruhelage eintritt, so empfiehlt es sich, das Gestell eingehend auf seine Stabilität zu prüfen. Auch das Wandbrett muß natürlich stabil sein. Das Gestell

---

1) Freundl. persönliche Mitteilung von Hrn. Dr. Czerny.

an der Decke aufzuhängen, ist im allgemeinen nicht empfehlenswert, da die Decke in der Regel größere Schwingungen ausführt.

Zu 5.: Über die Befestigungsweise der Drähte hat sich Julius nicht geäußert, hat ihr also keine Bedeutung beigelegt. Die gleichen Erfahrungen wurden im Laufe dieser Untersuchungen gemacht.

Zu 6.: Die Notwendigkeit eines guten Luftschutzes reicht viel weiter, als man in der Regel annimmt, worauf besonders White 12) hinweist; es genügen sehr kleine Impulse, um die Aufhängung in Bewegung zu setzen. Oft können durch Verwendung eines Luftschutzes, der meist aus Pappe hergestellt wird, merkbliche Erfolge erzielt werden. Man darf jedoch nicht die Ruhelage durch starke Wattedämpfung verbessern wollen (vgl. Punkt 7). Dagegen kann man durch Vergrößerung des Gewichtes der Aufhängung eine gewisse Unempfindlichkeit gegen Luftströmungen erzielen.

Zu 7.: Eine Dämpfung der durch die Erschütterungen und geringe Luftströmungen angeregten Eigenschwingungen ist von großer Wichtigkeit. Die Frage, wie und wo man am besten dämpft, ist in der Literatur verschieden beantwortet worden; in der Praxis finden sich noch viel mehr Variationen.

Die von Julius zunächst vorgeschlagene Dämpfung soll durch drei an der Peripherie angebrachte, aus zwei sich rechtwinklig schneidenden Metallblechen bestehende Dämpfer erfolgen, die in mit Öl gefüllte Gefäße tauchen. Da diese Dämpfung aber im Gebrauch ziemlich unpraktisch ist, verwendet man jetzt im allgemeinen lockere Wattebüschel, die auf einer Unterlage lose schleifen. Julius setzt sich unbedingt für ein Anbringen der Dämpfungsanlage in der Schwerpunktsebene ein, um zu vermeiden, daß Schwingungen um eine horizontale Achse durch den Schwerpunkt auftreten, wenn die Dämpfer einen Impuls bekommen 14).

Bei beiden Dämpfungsmethoden kann aber nicht ganz verhindert werden, daß Erschütterungen der Unterlage durch Dämpfer auf die Aufhängung übertragen werden.

Bei Wattedämpfung dämpft man am besten an drei Stellen (vgl. Abschnitt 5). Hat die Watte eine bestimmte Stärke erreicht, so treten sofort wieder Erschütterungen der Aufhängung auf. Als allgemeine Regel kann nur angegeben werden, daß



die Wattebüschel ganz locker aufliegen sollen. Zahlreiche Beobachtungen ergaben, daß dieser Punkt von großer Wichtigkeit sein kann. Ebenso ist darauf zu achten, daß die Dämpfung nicht unsymmetrisch ist; es darf also die Watte an der einen Stelle nicht mehr aufliegen als auf der anderen. Deshalb kann auch die von L. Day 14) vorgeschlagene asymmetrische Dämpfung mit nur zwei Wattebüscheln nicht allgemein empfohlen werden. Jedenfalls hat die bisherige Form der Dämpfung vielfach zu einer Verschlechterung der Aufhängung geführt. Deshalb wurden besonders ausgedehnte Versuche gemacht, um eine neue, bessere Form der Dämpfung zu schaffen. Hierüber ist im 5. Abschnitt berichtet.

Die Einführung einer neuen Dämpfungsmethode bildet den dritten wesentlichen Punkt der neuen Aufstellung.

#### 4. Versuche mit Stab- und Kombinationsaufstellungen

Die ersten Versuche, eine den in der Einleitung erwähnten Anforderungen entsprechende Aufstellung zu erhalten, liefen gewissermaßen auf eine Umkehrung der Juliusschen Aufhängung hinaus; d. h. es wurde versucht, mit Hilfe dreier elastischer Stützen die Erschütterungen zu beseitigen. U. a. wurden hierzu Spiralfedern verwendet, die unten mit starker Reibung über Messingstücke geschoben wurden, die auf einer Holzplatte befestigt waren. Oben trugen die Federn spitz zulaufende Messingstückchen, die in verschiedener Weise gegen eine mehr oder weniger belastete Auflageplatte gelagert waren. Dadurch bekam die Platte eine variable, seitliche Schwingungsdauer. Die Länge der Federn betrug etwa 10 cm. Es wurden verschiedene Anordnungen ausprobiert, jedoch mit keinerlei Erfolg. Das System zeigte sogar vielfach schlechtere Ruhelagen als auf dem benutzten Wandtisch.

Deshalb wurde, angesichts der schon im vorigen Abschnitt mitgeteilten Erfahrungen und Überlegungen, in der Folge auf eine Dämpfung der vertikalen Komponente der Erschütterungen prinzipiell verzichtet und die gleichfalls schon erwähnte Theorie zugrunde gelegt, daß ein System um so weniger Erschütterungen zeigt, je geringer die Koppelung mit dem Erdboden ist und je langsamer seine Eigenschwingungsdauer in horizontaler Richtung ist. Die erste Bedingung erforderte, daß die Masse



der Stützen nach Möglichkeit gering sei; bezüglich der zweiten Bedingung war zu erforschen, ob die mit Hilfe einfacher Anordnungen erreichten Schwingungsdauern eine genügende Ruhelage verbürgten.

Die erste Anordnung war folgende. Auf einer Grundplatte von Holz waren im Abstand von rund 25 cm drei hölzerne, quadratische Säulen von 15 cm Länge befestigt, in die Stricknadeln von 2,1 mm Dicke gesteckt wurden. Das freie Ende betrug 10,5 cm. In die hölzerne Auflageplatte waren kleine Glasplatten eingelegt, mit denen sie auf die Nadelspitzen gelegt wurde. Dabei war der Gedanke einer möglichst losen Koppelung maßgebend. Eine solche Anordnung hat eine ganz bestimmte Schwingungsdauer in horizontaler Richtung, die man nach seitlichem Anstoßen messen kann. Die Schwingungsdauer steigt mit steigender Belastung, wobei sich die Nadeln etwas biegen. Bei einer bestimmten Belastung knicken die Nadeln um. Das ist die natürliche Grenze der Belastung. Die Ruhelage dieser Anordnung wurde durch Aufsetzen des Systems beobachtet. Tab. 1 gibt die Maximalausschläge bei 3,5 m Skalenabstand mit den zugehörigen Schwingungsdauern.

Tabelle 1

t Sek.	Ausschlag	
	hor. mm	vert. mm
0,61	± 5	± 20
0,70	± 2,5	± 10
0,79	± 1	± 7,5
1,0	± 0,25	± 2,5
1,17	± 0,15	± 1
1,4	± 0,1	± 0,5
1,6	± 0,1	± 0,25
1,9	± 0,05	± 0,1

Trotz dieser noch ziemlich primitiven Anordnung waren also die Ausschläge des Systems in ganz rapidem Maße zurückgegangen. Es wurden nun mit verbesserten Hilfsmitteln ausgedehnte Versuche gemacht. Zunächst wurden Länge und Dicke der Nadeln variiert und dann zu Stahlstäben übergegangen, die teils auf Tischen, teils auf dem Fußboden standen. Die Stäbe wurden unten in geschlitzte Messingstücke

eingespannt, die durch eine Druckschraube zusammengepreßt waren und in eisernen Dreifüßen saßen. Damit war einerseits eine größere Stabilität erreicht, andererseits konnte man mit Hilfe der Stellschrauben die Stäbe anfangs vertikal ausrichten und gegebenenfalls jeden Fuß einzeln verschieben.

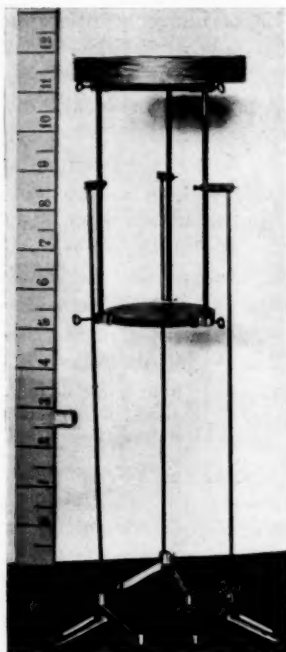


Fig. 3

wie zu den Juliusschen Aufhängungen. Eine derartige Anordnung zeigt Fig. 3. Die oben aufgesetzte Schalenkombination dient zur Dämpfung. (Näheres vgl. Abschnitt 5). Die auf dem Steinfußboden im Raume *E* aufgestellten Stahlstäbe hatten einen Durchmesser von 6,3 mm und eine Länge von 95 cm.

Um alles Eisen auszuschalten, wurden nun Versuche mit Messingstäben gemacht. Da der Elastizitätsmodul des Mes-

Zunächst lag das Gestell, in dem an den betreffenden Stellen Glas- oder Messingplättchen eingelegt waren, lose auf den oben zugespitzten Stäben auf. Später wurden die Stäbe, ebenso wie unten, auch oben fest eingespannt, so daß sie mit dem Gestell fest verbunden waren. Diese für den praktischen Gebrauch viel günstigere Anordnung verschlechterte, wie vergleichende Versuche zeigten, die Ruhelage des Systems nicht. Nur war zur Erzielung der gleichen Schwingungsdauern natürlich eine größere Belastung erforderlich. Bei allen weiteren Versuchen waren die Stäbe oben und unten fest eingespannt. Ferner ergaben Versuche, daß eine Verlagerung des Schwerpunktes die Ruhelage ebenfalls nicht verschlechterte, eine Tatsache, die wesentlich zur Vereinfachung der ganzen Aufstellung beiträgt. Als Gestell selbst wurden dieselben Gestelle benutzt

sings nur etwa halb so groß ist wie der des Stahls, mußten die Messingstäbe entsprechend dicker sein. Aus den beim Stahl benutzten Dimensionen ließen sich die beim Messing zu verwendenden Maße annähernd der Eulerschen Knickformel entnehmen, wenn etwa eine bestimmte Länge vorgeschrieben wurde. Die Eulersche Knickformel lautet:

$$G = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{J \cdot E}{l^2}$$

und gibt (theoretisch) die maximale Belastung eines unten eingespannten und oben belasteten Stabes, wenn das Trägheitsmoment des Stabquerschnittes  $J$ , die Stablänge  $l$  und der Elastizitätsmodul  $E$  bekannt ist.

Die auf dem Fußboden aufgestellten Messingstäbe hatten eine Länge von 130 cm und einen Durchmesser von 1,1 cm. Hier wurde als Auflage ein Juliussches Gestell verwendet, und zwar mit sehr gutem Erfolge. Tab. 2 gibt bei verschiedenen Schwingungsdauern die Maximalausschläge des Systems bei 3 m Skalenabstand.

Tabelle 2

τ Sek.	Ausschlag	
	horizontal mm	vertikal mm
1,3	± 0,15	± 0,2
1,5	± 0,1	± 0,15
1,6	± 0,1	± 0,1
1,8	± 0,08	± 0,05
2,0	± 0,05	± 0,025

Dies sind in Anbetracht der Empfindlichkeit des Systems sehr gute Ruhelagen, zumal in vorstehendem Falle die Aufstellung, die sich natürlich auch selbst dämpft, nicht künstlich gedämpft war und keinen Luftschutz hatte.

Es wurden ferner Versuche mit auf dem Tisch aufgestellten Messingstäben gemacht. Die Länge der Stäbe betrug 40—70 cm, ihr Durchmesser 3—5 mm. Auch hierbei ergaben sich dieselben Ruhelagen des Systems. Die dabei verwendete Schwingungsdauer betrug 1,9—2 Sek. Ein Drehspulengalvanometer von Hartmann & Braun, das infolge seiner Konstruktion auf einem Tisch hauptsächlich Pendel-

schwingungen ausführt und bei 4 m Skalenabstand im Fernrohr einen vertikalen Ausschlag von mehreren Millimetern zeigte, stand auf einer auf dem gleichen Tisch befindlichen Stabaufstellung absolut ruhig. Es sei noch erwähnt, daß diese Versuche später unter Anwendung der in Abschnitt 5 besprochenen Dämpfung mit sehr günstigem Resultat wiederholt wurden. Ebenso wurde eine mit solcher Dämpfung ausgerüstete Aufstellung an verschiedenen Orten des Instituts ausprobiert. Auf Wandtischen war die Aufstellung selbst im vierten Stockwerk, wo die Erschütterungen erheblich größer waren, mit gleichem Erfolg wie im Erdgeschoß zu verwenden. Bei Steinfußboden konnte man sie auch auf festen freistehenden Tischen aufstellen, während bei gewöhnlichen Holzfußböden das Umhergehen in der Regel Störungen verursacht. In diesem Falle hat natürlich auch eine auf dem Boden stehende Aufstellung mit langen Stäben keinen Nutzen. Bei sehr erschütterungsempfindlichen Räumen muß man übrigens besondere Maßnahmen in bezug auf die Aufstellung der Skala und des Fernrohrs treffen, damit man keinen Täuschungen ausgesetzt ist. Es ist nicht ganz überflüssig, diesen Punkt hier zu erwähnen.

Selbst eine vollständig symmetrische Aufstellung der einzelnen Teile kann natürlich nicht verhindern, daß bei stärkerer Belastung des Gestells die elastischen Stäbe oben etwas gebogen sind. Auf die Ruhelage übt das aber keine schädliche Wirkung aus. Die Gleichgewichtslage wird ferner um so weniger stabil, je stärker die Belastung ist. Aber selbst bei einer Schwingungsdauer von 2,5 Sek. ist sie für den praktischen Gebrauch noch stabil genug, namentlich wenn man die Ausbildung größerer Amplituden verhindert. Dagegen ist die Möglichkeit vorhanden, daß bei sehr langem Gebrauche der Aufstellung infolge einer Nachbiegung der Stäbe das Instrument seine Lage im Raume ein klein wenig verändert. In den meisten Fällen wird dies aber nichts schaden. Sonst ließe sich eine Regulierung leicht anbringen. Gelegentlich kommen übrigens auch bei der Juliusschen Aufhängung kleine Lageveränderungen vor, wenn sie schon länger im Gebrauche ist.

Durch die erwähnte Biegung der Stäbe wird eine geringe Abdämpfung der vertikalen Komponente der Erschütterungen

möglich, wenn auch im übrigen grundsätzlich darauf verzichtet wurde. Vollständig ausgeschaltet wird aber eine solche Dämpfung durch eine Anordnung, die kurz „Translationsaufstellung“ genannt werden soll. Hier wurden die massiven Stäbe durch lange, auf dem Fußboden aufgestellte Messingröhren ersetzt, die durch Federn eine große Translationschwingungsdauer erhielten. Es sollte dabei gleichzeitig versucht werden, ob ohne Gefährdung der Stabilität noch höhere Schwingungsdauern erreicht werden konnten. Im einzelnen

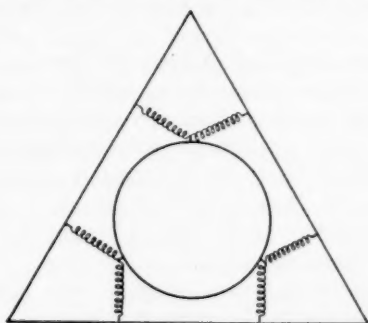


Fig. 4

war die Versuchsanordnung folgende. Ein aus starkem Winkelmessing hergestelltes gleichseitiges Dreieck von 80 cm Seitenlänge wurde mit der einen Seite mit mehreren starken Schrauben an der Wand befestigt, während die beiden anderen Seiten durch schräge Stützen mit der Wand verbunden waren. In die 125 cm langen Röhren waren oben und unten zugespitzte Messingstücke gesteckt. Unten standen die Spitzen auf gewöhnlichen Unterlegscheiben, oben waren sie gegen Messing gelagert. Das auf die Spitzen gesetzte Gestell wurde von sechs 10 cm langen Spiralfedern gehalten, die in der Ruhelage ein wenig gespannt waren. Diese verliehen dem Gestell eine durch Belastung veränderliche große Translationschwingungsdauer. Fig. 4 zeigt schematisch die Anordnung in der Aufsicht. War diese Aufstellung mit der neuen Dämpfung ausgerüstet, so wurden die gleichen Ruhelagen wie mit der Stabaufstellung erhalten. Es wurden Schwingungsdauern bis

3 Sek. erzielt. Sie waren aber insofern ohne Interesse, als keine Besserung der Ruhelage mehr eintrat und die Anordnung sehr instabil wurde. Auf genügende Stabilität der Röhren mußte geachtet werden. War also diese Aufstellung auch umständlicher, so zeigte sie doch, daß eine gute Ruhelage des Systems auch ohne Schwächung der vertikalen Komponente der Störungen möglich ist. Daß bei der Stab- und Translationsaufstellung größere Schwingungsdauern als bei der Aufhängung von Julius nötig sind, ist wohl dadurch zu erklären, daß hier durch die Stützen eine größere Energieübertragung stattfindet.

Es sollen hier noch 2 Versuche Erwähnung finden, die sich mit der Frage beschäftigen, ob man durch wiederholte Anwendung des gleichen Prinzips vielleicht eine noch ruhigere Unterlage für das Instrument schaffen könne — selbst auf Kosten der Einfachheit der Apparatur. Der Gedanke einer solchen „Kombinationsaufstellung“ ist nicht neu und, wenn auch in ganz anderer Form, von Airy 1) und Carman 15) in die Praxis umgesetzt worden.

Die erste Versuchsanordnung — eine Kombination von Stabaufstellung und Juliusscher Aufhängung — war folgende. Auf einem etwa 150 cm hohen, stark versteiften dreibeinigen Holztisch standen in gleichen Abständen drei eiserne Dreifüße, in die Stahlstäbe von 90 cm Länge und 6,3 mm Durchmesser eingespannt waren. Die Stäbe trugen eine variabel belastete kreisförmige Holzplatte und waren mit ihren Spitzen gegen Glas gelagert. An der Platte hing eine kleine sehr leichte Juliussche Aufhängung an etwa 150 cm langen Stahldrähten, die durch in die Tischplatte gebohrte Löcher gingen. Die gesamte Apparatur war mit einem dichten Luftschutz aus Pappe umgeben. Damit eine solche Kombination überhaupt Aussicht auf Erfolge hat, müssen zwei Bedingungen erfüllt sein. Erstens dürfen die beiden Schwingungsdauern nicht zu nahe beieinander liegen, und zweitens muß die Masse des zweiten Systems gering sein im Vergleich zu der des ersten, um Rückwirkungen möglichst auszuschließen. Soweit es die Verhältnisse zuließen, wurden beide Punkte berücksichtigt und verschiedene Variationen vorgenommen. Indessen war die Ruhelage der Systeme durchweg schlechter als auf einer gewöhn-

lichen Juliusschen Aufhängung. Übrigens wurde hier noch Wattedämpfung verwendet. Dieser Umstand, sowie vielleicht nicht ganz genügende Stabilitätsverhältnisse und die Tatsache, daß den beiden erwähnten Bedingungen nur in einem gewissen Umfang Rechnung getragen werden konnte, dürften die Ursache der schlechten Ergebnisse sein.

Von vornherein weit günstiger war die zweite Anordnung — eine Kombination zweier Aufhängungen. An einem äußerst schweren und stabilen Wandbrett hing an 55 cm langen Eisendrähten ( $\tau = 0,35$  Sek.) ein 13 kg schwerer eiserner Dreifuß, unten mit 3 Ösen versehen. Von diesen führten 155 cm lange Drähte zu einem starren Gestell, das die Schwingungsdauer  $\tau = 1,3$  Sek. hatte. Dieses, sowie der Dreifuß erhielten eine mehrfach variierte starke Öldämpfung unter Verwendung des Ringes und großer und kleiner Schalen (vgl. 5. Abschnitt). Das System erreichte hierauf eine ebenso gute Ruhelage wie auf einer guten Juliusschen Aufhängung, aber niemals eine bessere. Deshalb hätte es keinen Zweck, solche Kombinationsaufstellungen einzuführen, und es kann zum Schluß gesagt werden, daß von allen bisher besprochenen Anordnungen die Stabaufstellung mit langsamer Translationsschwingung wegen ihrer Wirkung und Einfachheit die beste ist.

Es sei noch bemerkt, daß White<sup>12)</sup> eine Anordnung erwähnt, die er „jointless-table“ nennt und die, wie er vermutet, übereinstimmt mit der von Abbot<sup>1)</sup> „rickety-table“ genannten Aufstellung. Diese Anordnung hat eine gewisse äußere Ähnlichkeit mit einer einfachen Stabaufstellung, geht aber von ganz anderen Voraussetzungen aus. Eine besondere praktische Bedeutung kommt ihr nicht zu. Es wurden ferner Versuche angestellt und Anordnungen geprüft, bei denen Federn 7, 11, 12, 16), elastische Mittel, Sand usw. verwendet werden; auch die Schwimmethode 2, 5, 7, 12), bei der das Instrument auf einer Flüssigkeit schwimmt, wurde untersucht.

Z. T. sind diese Anordnungen im praktischen Gebrauch sehr umständlich. Es gelang außerdem auf keiner Anordnung, das System auch nur annähernd in eine solche Ruhelage zu

---

1) Abbot, Smithsonian Report 1900. S. 102. — Diese Arbeit war mir leider nicht zugänglich.

bringen, die vergleichbar war mit der auf einer Stabaufstellung. Es mag deshalb ein kurzer Hinweis auf diese Versuche genügen.

#### 5. Das Dämpfungsproblem. Dämpfung durch innere Reibung von Flüssigkeiten

Die bisherigen Versuche haben gezeigt, wie wichtig eine gute Dämpfung der Aufhängung sowohl für die Ruhelage des Instrumentes als auch für die praktische Handhabung der Aufhängung oder Aufstellung ist. Die bisher hierzu benutzten Hilfsmittel wurden aber in den meisten Fällen der ihnen gestellten Aufgaben nicht gerecht und sind zum Teil recht umständlich. Die ungünstigen Wirkungen, die von den bisherigen Dämpfungsmitteln ausgingen, beruhten sämtlich darauf, daß die Aufhängung außer an den Aufhängepunkten auch noch an anderen Stellen mit festen Körpern in Verbindung stand. War diese Koppelung zu schwach, so wurde die Dämpfung außerordentlich gering, und man konnte mit der Aufhängung nur unter großen Vorsichtsmaßregeln arbeiten; war sie zu stark, so wurden Erschütterungen übertragen und dadurch die Ruhelage des Instruments wieder verschlechtert. Außerdem traten diese Fehler an verschiedenen Beobachtungsorten in gänzlich verschiedenem Maße zutage, und es war daher nicht möglich, allgemeingültige Vorschriften über die Art und das Anbringen der Dämpfung zu geben. Oft war man daher auf langwieriges Probieren angewiesen.

Um eine grundlegende Änderung dieser Verhältnisse herbeizuführen, lag es nahe, nach einem Prinzip zu suchen, durch dessen Anwendung das Grundübel, nämlich die Verbindung der Aufhängung mit außer ihr liegenden festen Körpern, vermieden wird. Ein solcher Ausgangspunkt ist das Prinzip der Dämpfung durch innere Reibung von Flüssigkeiten, ein Prinzip, das sowohl in der Technik als in der Physik anderweitig mit Erfolg verwendet wird. Es handelte sich nun darum, zu untersuchen, von welchen Faktoren die Dämpfung abhängt, sodann eine genügende Dämpfung herbeizuführen und schließlich die auf der Aufhängung befindliche Dämpfungsanlage in eine für den praktischen Gebrauch nicht zu umständliche Form zu bringen.



Für die Dämpfung kamen sowohl die um eine vertikale Achse erfolgenden Rotationsschwingungen der Aufhängung als auch die in einer horizontalen Ebene erfolgenden Translationschwingungen in Frage. Um die Verhältnisse nicht zu sehr zu komplizieren, wurden zunächst beide Schwingungsarten getrennt untersucht und erst später die Vereinigung vorgenommen.

Vor Besprechung der Experimente sei ein einfacher Fall theoretisch behandelt, auf den, wie sich zeigen wird, die Dämpfung der Rotationsschwingungen sich zurückführen läßt. Das Ergebnis dieser Untersuchung liefert für das Experiment wichtige Anhaltspunkte, die zum Teil auch für die Behandlung der im übrigen verwickelteren Translationsdämpfung von Bedeutung sind.

Wir gehen von folgendem Beispiel aus (Fig. 5). Eine in der  $X$ - $Z$ -Ebene liegende, unbegrenzt angenommene ebene Platte

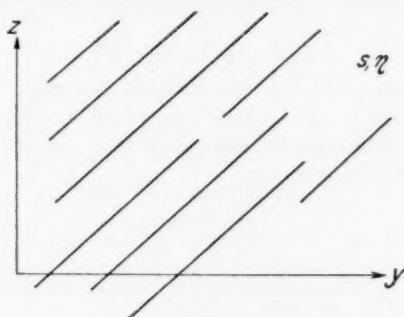


Fig. 5

führe geradlinige, rein periodische Schwingungen von der Frequenz  $\omega$  in der  $X$ -Richtung aus. Die  $X$ - $Y$ -Ebene sei horizontal angenommen. Der Halbraum, in dem die positive  $Y$ -Achse verläuft, sei mit einer inkompressiblen Flüssigkeit von der Dichte  $s$  und dem Reibungskoeffizienten  $\eta$  erfüllt. Die der Wand anliegende Flüssigkeitsschicht wird dann die gleichen periodischen Bewegungen wie die Wand ausführen, und es werden sich in Richtung der positiven  $Y$ -Achse Transversalwellen ausbreiten. Dadurch wird der Wand fortwährend Energie entzogen, oder mit anderen Worten: Die Bewegung der Wand wird gedämpft.

Daß in einer reibenden und inkompressiblen Flüssigkeit Transversalwellen möglich sind, läßt sich ableiten aus den Stokesschen Gleichungen. Die Gleichungen von Stokes, die aus den allgemeinen hydrodynamischen Grundgleichungen für eine reibende Flüssigkeit gewonnen werden, wenn man äußere Kräfte ausschließt und nur kleine Geschwindigkeiten betrachtet, lauten:

$$(1) \quad \begin{cases} s \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial x} + \eta \Delta u, \\ s \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial y} + \eta \Delta v, \\ s \frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial z} + \eta \Delta w, \end{cases}$$

$v, v, w$ , sind die Geschwindigkeitskomponenten,  $P$  der Druck,  $\eta$  der Reibungskoeffizient,  $s$  das spezifische Gewicht der Flüssigkeit. Aus (1) und der Inkompressibilitätsbedingung

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

leiten sich unter der Annahme, daß die Bewegung der Flüssigkeitsteilchen nur in der  $X$ -Richtung erfolgt und außer von der Zeit nur von  $y$  abhängig ist, daß also  $v = w = 0$  und  $u = f(y, t)$ , die beiden Gleichungen ab:

$$(3) \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

und

$$(4) \quad s \frac{\partial u}{\partial t} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Wird als Grenzbedingung angenommen, daß für  $y = 0$   $x = a \sin \omega t$  und für  $y = \infty$   $x = 0$  sei, so erhält man als Lösung der Gleichung (4), die formell übereinstimmt mit der Gleichung für die Wärmeleitung in einem unendlich langen Stabe, den Ausdruck:

$$(5) \quad x = a e^{-\frac{2\pi}{\lambda} y} \cdot \sin \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{y}{\lambda} \right) \right],$$

in dem  $\lambda$  die Wellenlänge, und  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  die Schwingungsdauer bezeichnet. Man überzeugt sich leicht von der Richtigkeit des Ausdrucks (5) durch Einsetzen in (4) unter Beachtung der Beziehung  $\frac{dx}{dt} = u$ . Auch die Grenzbedingungen sind erfüllt.

(5) ist der Ausdruck für Transversalwellen, die sich in der Richtung der positiven  $Y$ -Achse ausbreiten. Die Wellenlänge  $\lambda$  hat den Wert

$$(6) \quad \lambda = 2\pi \sqrt{\frac{2\eta}{s\omega}},$$

der Dämpfungsfaktor pro Wellenlänge den Wert

$$(7) \quad \delta = e^{-2\pi} \sim \frac{1}{540}.$$

Um nun zu erkennen, von welchen Faktoren die Dämpfung der Wand abhängt, wollen wir ausrechnen, wieviel Energie pro Schwingungsdauer der Wand entzogen wird. Diese Energie ist gleich der Arbeit, die die Wand pro Schwingungsdauer leistet. Es werde zunächst die Kraft (pro Flächeneinheit)  $(X_y)_{y=0}$  berechnet, deren Richtung mit der der  $X$ -Achse zusammenfällt und die der Bewegung der Wand entgegenwirkt. Für inkompressible Flüssigkeiten ist diese Kraft

$$(8) \quad (X_y)_{y=0} = -\eta \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}.$$

Da nach (5)

$$\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{2\alpha\omega\pi}{\lambda} \left( \sin \frac{2\pi t}{T} - \cos \frac{2\pi t}{T} \right),$$

so erhalten wir durch Einsetzen in (8):

$$(9) \quad (X_y)_{y=0} = -\frac{2\pi\alpha\eta\omega}{\lambda} \left( \sin \frac{2\pi t}{T} - \cos \frac{2\pi t}{T} \right).$$

Die Arbeit längs eines Wegelementes ist  $(X_y)_{y=0} \cdot dx$ , die während der Schwingungsdauer  $T$  geleistete Arbeit

$$(10) \quad E_T = \int_0^T (X_y)_{y=0} \cdot \left( \frac{dx}{dt} \right)_{y=0} \cdot dt.$$

Setzt man in (10) die Werte ein, so erhält man

$$(11) \quad E_T = \frac{2\pi\alpha^2\omega^3\eta}{\lambda} \int_0^{2\pi} \left( \cos^2 \alpha \frac{2\pi t}{T} - \sin \frac{2\pi t}{T} \cos \frac{2\pi t}{T} \right) \cdot dt.$$

Aus (11) folgt nach Einführung von  $\alpha = \frac{2\pi t}{T}$ ;  $dt = \frac{T}{2\pi} d\alpha$ :

$$E_T = \frac{\alpha^2\omega^3 T\eta}{\lambda} \left\{ \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha - \int_0^{2\pi} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha \right\},$$

und da

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha \, d\alpha = \pi \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \sin \alpha \cos \alpha \, d\alpha = 0,$$

$$E_T = \frac{\pi a^2 \omega^2 \eta T}{\lambda}.$$

Diese Gleichung geht mit der Beziehung  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  und der aus

(6) folgenden Beziehung  $\frac{2\pi}{\lambda} = \sqrt{\frac{s\omega}{2\eta}}$  über in den Ausdruck:

$$(12) \quad E_T = \pi \cdot a^2 \cdot \omega^2 \sqrt{\frac{s\eta}{2\omega}}.$$

Natürlich muß (12) dieselbe Dimension haben wie (10), nämlich  $[m \, t^{-2}]$ , wovon man sich durch Einsetzen der Dimensionen  $[X] = [m \, t^{-1} \, t^{-2}]$ ,  $[\eta] = [m \, t^{-1} \, t^{-1}]$ ,  $[a] = [l]$ ,  $[\omega] = [t^{-1}]$  leicht überzeugen kann.

Praktisch maßgebend für die Größe der Dämpfung ist nun die von der Wand in einer Sekunde geleistete Arbeit, d. h. die Leistung. Man erhält sie, wenn man den in (12) angegebenen Wert durch die Schwingungsdauer  $T$  dividiert:

$$(13) \quad L_1 = \frac{E_T}{T} = a^2 \omega^2 \sqrt{\frac{\omega s \eta}{8}}.$$

Hieraus folgt, daß die Dämpfung der sich periodisch bewegenden Platte mit dem spezifischen Gewicht und dem Reibungskoeffizienten der Flüssigkeit relativ langsam, dagegen mit der Frequenz stark veränderlich ist, ebenso mit der Amplitude.

Denkt man sich nun zwei parallele, unbegrenzte Platten, zunächst in großem Abstände, zwischen denen sich die Flüssigkeit befindet, so werden, wenn beide Platten gleichartige periodische Bewegungen ausführen, von jeder Platte sich Transversalwellen ausbreiten, die sich schließlich in der Mitte treffen und dann einander durchdringen. Dadurch würde eine genauere Verfolgung der Vorgänge verwickelter werden.

Eine einfache Überlegung zeigt jedoch, daß es gar nicht notwendig ist, den eben erwähnten Fall näher ins Auge zu fassen. Infolge des großen Dämpfungsfaktors, der pro Wellenlänge  $1/540$  beträgt, werden die Wellen schon nach einer sehr

kurzen Strecke so stark abgedämpft, daß sie praktisch gar nicht mehr vorhanden sind. Genauere Angaben gibt Tab. 3, in der der Dämpfungsfaktor  $\delta$  für  $y = \frac{\lambda}{4}$ ,  $y = \frac{\lambda}{2}$  und  $y = \lambda$  berechnet und die Größe der entsprechenden Amplituden in Prozenten angegeben ist.

Tabelle 3

$y$	
$\frac{\lambda}{4}$	$e^{-\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4,8} = 20\%$
$\frac{\lambda}{2}$	$e^{-\pi} = \frac{1}{23} = 4\%$
$\lambda$	$e^{-2\pi} = \frac{1}{540} = 0,2\%$

Bereits nach einer halben Wellenlänge also beträgt die Amplitude nur 4 Proz. der ursprünglichen. Wenn man bedenkt, daß die praktisch in Frage kommenden Anfangsamplituden auch schon sehr gering sind, so wird man näherungsweise annehmen dürfen, daß etwa nach einer halben Wellenlänge die Welle abgeklungen ist. Ist also die Entfernung der beiden Platten größer als eine Wellenlänge, so spielt der mittlere Teil der Flüssigkeit für die Dämpfung kaum eine Rolle.

Die Wellenlänge hat nach (6) den Wert

$$(14) \quad \lambda = 2\pi \sqrt{\frac{2\eta}{s\omega}}$$

Verwendet man also unter sonst gleichen Umständen eine Flüssigkeit mit kleinerem Reibungskoeffizienten, so kann man ohne Schaden die Platten einander nähern, da die Wellenlänge kleiner geworden ist. Man erhält dann eine dem kleineren Reibungskoeffizienten entsprechende geringere Dämpfung. Man könnte aber auch daran denken, den bisherigen Plattenabstand beizubehalten und so viele parallele Platten einzuschalten, daß der Abstand zweier Platten zu der kleineren Wellenlänge in demselben Verhältnis steht wie der ursprüngliche Plattenabstand zu der größeren Wellenlänge. Ob diese Anordnung von Vorteil ist, wollen wir an einem konkreten Beispiel untersuchen.

Der Raum zwischen den beiden Platten sei mit Paraffinöl ( $\eta_p = 1$ ) gefüllt. Wir setzen das spezifische Gewicht des Öles näherungsweise gleich 1, bezeichnen die bei der Frequenz  $\omega$  auftretende Wellenlänge mit  $\lambda_p$  und denken uns die Platten im Abstand  $2\lambda_p$  aufgestellt. Dann beträgt nach (13) die Leistung pro Flächeneinheit

$$(15) \quad L_1 = 2a^2 \omega^2 \sqrt{\frac{\omega}{8}}.$$

Ist aber der Zwischenraum mit Wasser ( $s = 1$ ,  $\eta_w = 0,01$ ) gefüllt, so folgt aus (14):

$$\lambda_w = \frac{\lambda_p}{10}.$$

Wenn man nun neun, den zwei schon vorhandenen parallele Wände einschaltet, die die gleichen periodischen Bewegungen ausführen, so beträgt der Abstand zweier Wände  $2\lambda_w$ , und für die Leistung erhält man:

$$L_1 = 20 a^2 \omega^2 \sqrt{\frac{\omega}{8 \cdot 100}} = 2a^2 \omega^2 \sqrt{\frac{\omega}{8}},$$

also genau den gleichen Wert wie in (15). Daraus folgt, daß, wenn ein bestimmter Raum zur Verfügung steht, man mit einer Flüssigkeit mit geringerem Reibungskoeffizienten auch nach Einfügung von Zwischenwänden keine größere Dämpfung erzielen kann.

Dagegen kann man die Dämpfung zunächst vergrößern, wenn man eine Flüssigkeit verwendet, die etwa denselben Reibungskoeffizienten besitzt wie z. B. Wasser, aber ein größeres spezifisches Gewicht hat. Das ist der Fall beim Quecksilber. Infolge der Verkleinerung der Wellenlänge nach (14) kann man mehr Unterteilungen vornehmen; außerdem vergrößert sich die Leistung nach (13) infolge des höheren spezifischen Gewichtes. Man könnte also, um dieselbe Dämpfung zu erreichen, die Dämpfungsanlage auf einen kleineren Raum zusammendrängen. Indessen muß man bedenken, daß sich das Quecksilber in einem geeigneten Gefäß auf der Aufhängung befindet und deren Trägheitsmoment derart vergrößert, daß die Dämpfung sich wieder verschlechtert. Nimmt man hinzu, daß, wie spätere Versuche zeigten, auch für die Dämpfung der Translationsschwingungen Quecksilber ungünstig ist und daß wegen seiner Giftigkeit besondere Vorsichtsmaßregeln ergriffen

werden müßten, so kann gesagt werden, daß Quecksilber zum Dämpfen der Schwingungen eine ungeeignete Flüssigkeit ist.

Alle bisher abgeleiteten Beziehungen gelten strenggenommen nur für unendlich ausgedehnte ebene Platten. Näherungsweise aber lassen sie sich auch für gekrümmte Platten anwenden, mit um so geringeren Fehlern, je größer der Krümmungsradius der Platten ist, insbesondere für die Wände eines zylindrischen Gefäßes mit nicht zu kleinem Durchmesser. Bei begrenzten Platten treten natürlich Komplikationen auf; jedoch werden die abgeleiteten Zusammenhänge in ihren Grundlagen nicht geändert.

Zu den ersten Versuchen über Dämpfung von Rotationschwingungen wurde ein aus Weißblech hergestelltes zylindrisches Gefäß von etwa 20 cm Durchmesser und 5 Liter Rauminhalt verwendet. Das Gefäß wurde einmal mit Wasser, einmal mit einem sehr zähen Öl gefüllt, das den Reibungskoeffizienten  $\eta = 6,2$  hatte und das künftig als Z-Öl bezeichnet ist. Die durch Drehen der Aufhängung mit der Hand um die vertikale Achse erzeugten Rotationsschwingungen wurden, hier und bei allen späteren Versuchen, mittels eines auf der Aufhängung befindlichen Spiegels bei einem Skalenabstand von 4 m mit dem Fernrohr beobachtet. Zum Vergleich wurde auch das Abklingen der Schwingungen ohne jede künstliche Dämpfung festgestellt. In diesem Falle wurde das Gewicht des gefüllten Gefäßes durch entsprechende Gewichte ersetzt. Gemessen wurde der Abstand zweier aufeinanderfolgender Umkehrpunkte im Fernrohr von 3 zu 3 Minuten. Kleine Unregelmäßigkeiten in der Dämpfung rühren daher, daß die Beobachtungen ohne Luftschutz ausgeführt wurden. Die Ergebnisse sind in Tab. 4 zusammengestellt.

Tabelle 4

<i>t</i> min	Ohne Dämpfung mm	Wasserdämpfung mm	Öldämpfung mm
0	70	70	70
3	65	12	8
6	59	1,5	0,1
9	51	1,0	0,1
15	41	1,0	0,1
36	23	1,0	0,1
60	8	1,0	0,1

Der am Schluß jeder Spalte angegebene Ausschlag veränderte sich innerhalb langer Zeit nicht mehr, so daß man ihn als die tatsächlich erreichte Ruhelage der Aufhängung ansprechen kann. Aus der Tabelle ist deutlich erkennbar, daß der stärkeren Rotationsdämpfung eine erheblich bessere Ruhelage der Aufhängung in bezug auf Rotationsschwingungen parallel geht.

Jedoch ist die eben beschriebene Anordnung nicht die günstigste. Nach Gleichung (14) beträgt nämlich bei den üblichen Frequenzen die Wellenlänge beim Öl etwa 5–9 cm, beim Wasser weniger als 1 cm. Daraus folgt, daß die Hauptmasse der in dem erwähnten Gefäß befindlichen Flüssigkeit zur Dämpfung gar nichts beiträgt und nur die Masse der Aufhängung vergrößert. Da nach (13) die Leistung außerdem vom Quadrat der Amplitude abhängt, so war zu vermuten, daß ein ringförmiger, geschlossener Hohlkörper von nicht zu kleinem Radius und mäßig großem Querschnitt ein geeigneteres Gefäß sei, auf das man wegen des großen Krümmungsradius die oben angestellten theoretischen Überlegungen auch mit größerem Rechte anwenden kann.

Ein solcher Hohlkörper mit fast quadratischem Querschnitt ( $5,5 \times 6$  cm) mit einem inneren Radius von 14,5 cm und einem äußeren von 20 cm wurde aus Weißblech hergestellt. An die Öffnung zum Eingießen war ein kurzes Rohr gesetzt. War der Ring gefüllt, so mußten sich von allen vier Wänden nach der Mitte zu Transversalwellen ausbreiten, wobei infolge der gewählten Dimensionen ein Durchdringen der von zwei gegenüberliegenden Wänden ausgehenden Wellen ausgeschlossen war. Schon mit Wasserfüllung zeigten sich starke dämpfende Wirkungen. Mit Ölfüllung konnte man (unter den oben erwähnten Verhältnissen) große Amplituden bereits in wenigen Sekunden bis auf  $\frac{1}{20}$  mm abdämpfen. Eine solche Dämpfung, wie sie z. B. durch Watte ohne Nebenwirkungen niemals erreicht werden kann, ist aber beim praktischen Gebrauch nicht notwendig; bei der endgültigen Dämpfungsanlage ist daher die Rotationsdämpfung erheblich geringer.

Bei der Translationsdämpfung werden zweckmäßig Gefäße verwendet, in denen eine Flüssigkeit mit freier Oberfläche hin und her schwingen kann; denn eine Flüssigkeit mit freier



Oberfläche wird immer leichter in Bewegung gesetzt. Es besteht also ein grundlegender Unterschied gegenüber der Rotationsdämpfung. Während man bei dieser Dämpfung von Eigenschwingungen der Flüssigkeit vollständig absehen kann, spielt bei der Translationsdämpfung die Eigenschwingung der Flüssigkeit, die von der Flüssigkeitshöhe, dem spezifischen Gewicht, dem Reibungskoeffizienten und der Gefäßform abhängt, eine wesentliche Rolle. Ein Ausbreiten von Transversalwellen vom Boden des Gefäßes aus findet natürlich auch hier statt. Außer der Eigenschwingung der Flüssigkeit hat man noch gewisse Oberflächenerscheinungen zu beachten, die verschieden sind je nach der Viskosität der Flüssigkeit und sich infolge des Widerstandes der Seitenwände ausbilden, und zwar um so mehr, je liquider die Flüssigkeit ist. Bei sehr kleinen Amplituden spielen sie allerdings kaum eine Rolle. Nur bei größeren Amplituden kann die Oberfläche unter Umständen anfangs viel größere Schwingungen ausführen als die Aufhängung selbst, auf der das Gefäß steht.

Diese Komplikationen machten daher längere experimentelle Untersuchungen notwendig. Es kommt noch hinzu, daß die Dämpfung der Translationsschwingungen das Wichtigste ist, denn bei einer auf der Aufhängung selbst befindlichen Dämpfungsanlage treten Rotationsschwingungen nur in geringem Maße auf. Hängt das System des Instruments an einem sehr dünnen Faden, so ist es außerdem wahrscheinlich, daß Rotationsschwingungen der Aufhängung nur in sehr geringem Grade auf das System übertragen werden, namentlich wenn die Eigenschwingungsdauer der Rotationen des Systems um die Vertikale und die der Aufhängung auch noch weit auseinanderliegen.

Die ersten orientierenden Versuche wurden mit zwei rechteckigen, 50 cm langen und 10 cm breiten Glasschalen gemacht, die unter einem Winkel von annähernd  $90^\circ$  auf die Aufhängung gestellt wurden. Sie waren zunächst mit Wasser, später mit Öl gefüllt. Mittels des Fernrohrs wurde an einem im Mittelpunkt des Grundbrettes befindlichen Maßstabe festgestellt, in welcher Zeit die durch Anstoßen der Aufhängung hervorgerufenen Translationsschwingungen von 10 auf 5 mm herabgingen, wenn eine bestimmte Flüssigkeitshöhe vorhanden

war. Da die Schalen nur 30 mm hoch waren, sind in der Tab. 5 nur Höhen bis 29 mm angeführt.

Tabelle 5

<i>b</i> mm	<i>t</i> Sek.
3	300
10	180
13	90
17	50
24	30
27	25
29	22

Bei allen folgenden Versuchen betrug, ebenso wie hier, wenn nicht ausdrücklich anders bemerkt, die Schwingungsdauer der Aufhängung 1,4 Sek.

Das erschütterungsempfindliche System erreichte auf der Aufhängung (zwei Schalen mit 29 mm Ölhöhe, Öhring, Luftschutz, 4 m Skalenabstand) im schlechtesten Falle eine Ruhelage von  $\pm 0,07$  mm, während die beste Ruhelage bei 3 teiliger Wattedämpfung  $\pm 0,1$  mm betrug. Hierbei wurde das Gewicht der gefüllten Gefäße entsprechend ersetzt (ohne wesentliche Schwerpunktsverlagerung). Der Dämpfungsfaktor bei Wattedämpfung war erheblich geringer als bei der Oldämpfung, besonders natürlich bei der Rotationsdämpfung. Bei zentraler Wattedämpfung stand das System bis auf höchstens  $\pm 0,15$  mm ruhig. Hier nahm die Translationsdämpfung erheblich ab, und die Rotationsdämpfung war kaum merklich. Wenn trotzdem die zentrale Dämpfung zuweilen empfohlen wird, so mag das seinen Grund in günstigeren örtlichen Verhältnissen haben, vielleicht auch manchmal darin, daß sowohl die Wahl der Stärke der Watte als auch die Beseitigung von Unsymmetrien bei 3 teiliger Dämpfung nicht immer gleich zum Erfolge führt.

Nach Beendigung dieser Voruntersuchungen wurde nun dazu geschritten, nur ein einziges Gefäß zu verwenden und die darin befindliche Flüssigkeit zur Dämpfung *beider* Schwingungsarten zu benutzen. Die Flüssigkeit befand sich dabei in kreisförmigen Schalen aus Weiß- oder Zinkblech. Für die Schalen von 40 cm Durchmesser wurde eine besondere Aufhängung hergestellt. Tab. 6 gibt einige Werte, wobei *t* die

Tabelle 6

Wasser		Z-Öl	
<i>h</i> mm	<i>t</i> Sek.	<i>h</i> mm	<i>t</i> Sek.
6	30	15	30
8	60	20	40
10	120	23	50
12	300	26	60
16	600		

Zeit bedeutet, in der die Schwingung von 10 auf 1 mm abgeklungen ist. Diese Zeit wird künftig kurz als „Dämpfungszeit *t*“ bezeichnet. Die Tabelle zeigt, daß die erwähnten Schalen zur Dämpfung sehr wohl verwendbar sind. Weitere Versuche mit Z-Öl zeigten die wichtige Tatsache, daß es, unter sonst konstanten Verhältnissen, eine bestimmte Flüssigkeitshöhe gibt, bei der die Dämpfung eine maximale wird. Diese Höhe ist in der Folge als „optimale Höhe“ bezeichnet. Vergrößert oder verkleinert man diese Höhe, so wird die Dämpfung zuerst wenig, dann immer stärker herabgesetzt. Zur Feststellung dieser optimalen Höhe bei Z-Öl wurden ausgedehnte Versuche unternommen, deren Hauptergebnisse in Tab. 7 zusammengestellt sind. Verwendet wurden Schalen von 23 cm, 29,5 cm und 38,5 cm Durchmesser. Die Schwingungsdauern

Tabelle 7

<i>d</i> cm	<i>t</i> = 1 Sek.		<i>t</i> = 1,4 Sek.		<i>t</i> = 1,73 Sek.	
	<i>h</i> cm	<i>t</i> Sek.	<i>h</i> cm	<i>t</i> Sek.	<i>h</i> cm	<i>t</i> Sek.
23,0	1,3	105	1,3	290	1,2	570
	1,5	80	1,4	285	1,3	540
	1,6	82	1,5	300	1,5	600
	1,8	87	1,7	320	1,7	690
29,5	1,8	35	1,5	135	1,3	320
	1,9	34	1,7	130	1,5	225
	2,2	35	1,8	130	1,6	220
	2,5	40	1,9	135	1,8	265
38,5	2,2	14	1,7	55	1,7	85
	2,3	14	1,9	50	1,8	80
	2,4	14	2,0	50	2,0	85
	2,6	16	2,2	55	2,2	100

43\*

von 1,0 Sek., 1,4 Sek. und 1,72 Sek. entsprechen Drahtlängen von rund 1, 2 und 3 m. Das Gewicht der Aufhängung einschließlich der größten Schalen betrug 5,57 kg; bei den kleineren Schalen wurden entsprechend mehr Gewichte aufgelegt. Die Höhen wurden durch einen eingetauchten Maßstab gemessen; ihre ganz genaue Bestimmung war weder notwendig, noch infolge der unvermeidlichen Verbiegungen der Schalen ganz leicht zu ermitteln. Es sei also ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die angegebenen Werte nur bis auf etwa 1 bis 2 mm genau sind. Das genügt auch für die Praxis vollständig. Auch die Abhängigkeit des Reibungskoeffizienten von der Temperatur wurde nicht berücksichtigt.

Man sieht aus der Tabelle, daß die optimale Höhe bei Vergrößerung der Frequenz und des Schalendurchmessers wächst. Die Dämpfungszeit ändert sich aber nur wenig, wenn man die optimale Höhe um einige Millimeter überschreitet. Aus Tab. 7 kann man bei Verwendung von Z-Öl mit genügender Genauigkeit die optimale Höhe bestimmen, wenn der Schalendurchmesser und die Frequenz gegeben ist. Dasselbe gilt natürlich für jede andere Flüssigkeit, deren Reibungskoeffizient in der Nähe des Wertes 6 liegt und die ein von 1 nicht sehr verschiedenes spezifisches Gewicht hat.

Schließlich war noch die Frage zu klären, ob vielleicht — analog dem Auftreten der optimalen Höhe — ein bestimmter Reibungskoeffizient zur Erzielung einer maximalen Dämpfung notwendig sei. Dazu war eine Flüssigkeit herzustellen, deren Reibungskoeffizient innerhalb weiter Grenzen leicht verändert werden konnte. Hierzu erwies sich als geeignet eine Lösung von gewöhnlichem, im Handel käuflichen Rübensirup in Wasser. Der Sirup wurde mit bestimmten Wassermengen versetzt, eine Zeitlang stark erwärmt und dann auf Zimmertemperatur abgekühlt. Er blieb dann in der zu den Versuchen benötigten Zeit in unveränderter Konsistenz. Die Reibungskoeffizienten wurden nach der Ausflußmethode relativ zu Wasser bestimmt, bei stark viskosen Lösungen durch die Fallzeit eines in der Flüssigkeit absinkenden Stahlkugelhens. Verwendet wurden Schalen von 29 und 38,5 cm Durchmesser; die Schwingungsdauer der Aufhängung betrug 1,4 Sek. In Tab. 8 ist ein Teil der Ergebnisse zusammengestellt. *h* bedeutet die optimale

Höhe,  $t$  die Dämpfungszeit, die dieser Höhe entspricht. Die Reibungskoeffizienten  $\eta$  sind in absolutem Maße angegeben.

Tabelle 8

$\eta$	$d = 38,5 \text{ cm}$		$d = 29 \text{ cm}$	
	$h$ mm	$t$ Sek.	$h$ mm	$t$ Sek.
3,6	15	48	12	95
2,0	12	31	10	88
1,1	11	27	9	84
0,75	9	25	8	81
0,27	8	23	7	76
0,053	5	14	4	70

Die Tabelle lehrt, daß es keinen „optimalen Reibungskoeffizienten“ gibt, sondern daß man grundsätzlich jede Flüssigkeit zur Dämpfung der Translationsschwingungen verwenden kann. Ja es zeigt sich sogar das zunächst überraschende Ergebnis, daß bei Flüssigkeiten mit kleinerem Reibungskoeffizienten nicht nur die optimale Höhe, sondern auch die Dämpfungszeit abnimmt. Hierzu ist zu sagen, daß eine liquider Flüssigkeit überhaupt leichter in Bewegung kommt als eine stärker viskose. Außerdem wird durch die geringere optimale Höhe das Gewicht der Aufhängung vermindert, was bei Schalen mit größerem Durchmesser Einfluß haben kann.

Es ist noch zu bemerken, daß die Annehmlichkeit einer geringen optimalen Höhe stets eine bedeutende Abnahme der Rotationsdämpfung nach sich zieht. Eine gewisse Größe dieser Dämpfung ist aber stets erwünscht. Infolgedessen wird man in der Praxis einen nicht zu kleinen Reibungskoeffizienten bevorzugen. Außerdem sind sehr geringe Höhen infolge der stets vorhandenen Unregelmäßigkeiten des Bodens nicht ganz leicht realisierbar.

Einige besondere Versuche wurden noch mit reinem Wasser angestellt. Der Boden des benutzten Gefäßes bestand aus einer ebenen Glasplatte, auf die ein kreisförmiger Blechrand von 35 cm Durchmesser aufgeklebt war. Die Höhen wurden aus dem eingegossenen Volumen und dem Schalendurchmesser berechnet. Bei einer Schwingungsdauer der Aufhängung von 1,75 Sek. z. B. betrug bei Wasser bei einer Höhe von 2 mm

die Dämpfungszeit 30 Sek., wobei zu bemerken ist, daß nach den bisherigen Versuchen die optimale Höhe beim Wasser bei der angegebenen Frequenz einen kleineren Wert als 2 mm hat. Bei Füllung mit Paraffinöl ( $\eta = 1$ ) betrug  $t$  bei einer optimalen Höhe von 6 mm etwa 60 Sek. Dagegen wurde eine bestimmte Rotationsschwingung vom Öl in einem Viertel der Zeit abgedämpft, die beim Wasser nötig war. Bei höheren Frequenzen, bei denen die optimale Höhe steigt, wäre die Verwendung von Wasser eher diskutabel.

Bei Untersuchung der Translationsdämpfung durch sehr schwach viskose Flüssigkeiten (z. B. Wasser) war es von großer Wichtigkeit, daß der beobachtete Maßstab sich genau im Mittelpunkt des kreisförmigen Grundbrettes befand. Die Aufhängung führt immer kleine Rotationsschwingungen aus (deren Amplitude hier als geradlinig anzusehen ist), die im allgemeinen eine andere Periode als Translationsschwingungen besitzen. Befindet sich der Maßstab außerhalb des Zentrums, so findet eine Überlagerung dieser beiden Schwingungen statt, und es hat den Anschein, als wenn die Dämpfung ganz unregelmäßig vor sich ginge. Bei stärker viskosen Flüssigkeiten tritt diese Erscheinung natürlich nicht mehr auf, da bei ihnen die Rotationsschwingungen sehr schnell abgedämpft werden.

Zusammenfassend kann gesagt werden: Zur Dämpfung von Translationsschwingungen und Rotationsschwingungen bei Aufhängungen oder Stabaufstellungen verwendet man zweckmäßig kreisrunde Schalen von mindestens 30 cm Durchmesser, die bis zur optimalen Höhe mit einer Flüssigkeit von mittlerem Reibungskoeffizienten (z. B. Paraffinöl) gefüllt werden. Die optimale Höhe, die die günstigsten Verhältnisse verbürgt, ist unabhängig von der Masse der Aufhängung, dagegen abhängig von der verwendeten Frequenz, dem Schalendurchmesser und dem Reibungskoeffizienten der Flüssigkeit, und kann in den in der Praxis gewöhnlich vorkommenden Fällen aus den vorstehenden Tabellen mit genügender Genauigkeit bestimmt werden. Bei extremen Verhältnissen ist sie durch einige Versuche leicht bestimmbar. Je nach den Umständen verwendet man eine oder mehrere Schalen.

Diese Art der Dämpfung ist jeder bisher angegebenen anderen Art, insbesondere der Dämpfung durch Watte, nicht

nur an Stärke überlegen, sondern auch dadurch, daß sie trotz ihrer Einfachheit und Unveränderlichkeit keinerlei störende Nebenwirkungen hervorbringt.

Bei der Stabaufstellung tritt die Flüssigkeitsdämpfung nur als eine Ergänzung zu der schon vorhandenen natürlichen Dämpfung hinzu, wobei die Dämpfungsanlage zugleich einen Teil der notwendigen Belastung des Gestells übernimmt. Bei der Juliusschen Aufhängung dagegen muß man je nach dem Gewicht des Gestells darauf achten, daß man eine genügende Dämpfung erhält, da hier keine wesentliche natürliche Dämpfung vorhanden ist. Es wird sich natürlich im allgemeinen empfehlen, den Abstand der Aufhängepunkte der Aufhängung der Dämpfungsschalen wegen nicht zu vergrößern. Große Schalen sind immer günstiger als kleinere.

#### **6. Beschreibung eines Modells der erschütterungsfreien Stabaufstellung**

Nach längeren Versuchen wurden unter Verwertung der bisherigen Erfahrungen zunächst zwei Exemplare eines ersten Modells hergestellt<sup>1)</sup>, die im wesentlichen in der Form den schon beschriebenen Stabaufstellungen gleichen. Das Instrument stand auf einer Holzplatte, die Dämpfungsanlage wurde von vier kreisrunden Schalen gebildet. Ein Exemplar wurde im physikalischen Institut geprüft, das andere war in einem Versuchsraum der Studiengesellschaft der Firma Osram in Benutzung. Beide Apparate arbeiteten in der erwarteten Weise. Die dabei verwendeten Dimensionen erwiesen sich als brauchbar.

Auf Grund hiervon wurde schließlich ein zweites Modell konstruiert<sup>2)</sup>, das speziell für den dauernden praktischen Gebrauch gedacht ist. Es ist in Fig. 6 abgebildet. Das Modell ist gänzlich eisenfrei gebaut, damit auch Apparate, bei denen die Anwesenheit von Eisen schädlich einwirken könnte, aufgesetzt werden können. Es besteht aus einer Grundplatte, die die elastischen Stäbe trägt, und aus dem Gestell, das auf

---

1) Von der Firma Osram, Berlin.

2) D.R.P. Nr. 460543. Das Modell wurde hergestellt von Hrn. Muselius, Mechaniker am hiesigen physikalischen Institut.

die Stäbe aufgesetzt wird und das Instrument und die Dämpfungsanlage trägt.

Die Grundplatte ist ein äußerst stabiles, auf drei verstellbaren Fußschrauben ruhendes Dreieck aus Messingguß. Die drei 4 mm dicken Messingstäbe, deren Entfernung voneinander 44 cm beträgt, sind unten zunächst in geschlitzte Messingstücke

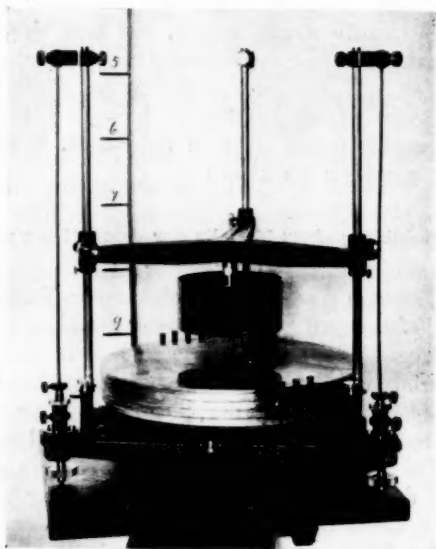


Fig. 6

eingespannt, die oben durch einen mit einer Schraube versehenen Ring fest zusammengepreßt werden. Das Messingstück selbst ist durch eine Mutter in einer es umschließenden Röhre um 1 cm vertikal verschiebbar, und zwar so, daß es sich nicht um die Vertikalachse drehen kann. Es wird außerdem in der endgültigen Stellung durch eine Druckschraube fest an die Rohrwandung gepreßt. Auf der vorderen Dreieckseite ist rechtwinklig zu ihr noch vorn ein kurzer Arm angebracht, der eine Libelle trägt. Diese ist in der Figur sichtbar.



Das Gestell besteht aus drei Aluminiumstäben von 46 cm Länge und 12 mm Dicke, die durch zwei stabile, sternförmige Gebilde aus Duraluminiumguß zusammengehalten werden. Der obere Stern ist in vertikaler Richtung verschiebbar und trägt auf der Oberseite Nuten zur Aufnahme der Fußschrauben des Instruments. Auf seiner Unterseite ist ein abnehmbares Messinggefäß befestigt, das zur Aufnahme des Zusatzgewichts (Bleischrot) dient.

In den unteren Stern sind die Stäbe des Gestells fest eingesetzt. Er trägt die mit Schrauben befestigte Dämpfungsanlage. Diese besteht aus vier übereinandergestellten, fest verlöteten Schalen aus dünnem Zinkblech von 38 cm Durchmesser und 12 mm Höhe. Die oberste Schale ist durch einen fest verlöteten Deckel geschlossen. An jeder Schale sind zwei dünne Messingröhren zum Einfüllen befestigt, die mit Korken verschlossen sind. Jede Schale ist mit etwa 750 ccm Paraffinöl gefüllt, was hier einer Höhe von etwa 6 mm entspricht. Auch bei einer kleinen Neigung oder Verbiegung der Schalen würde also die Flüssigkeit frei schwingen können, ohne den Deckel zu berühren.

Oben sind an die Gestellstäbe Messingstücke angeschraubt, die mit dem anderen Ende auf die elastischen Stäbe einfach aufgesetzt und dann verschraubt werden. Die elastischen Stäbe bekommen so von den Gestellstäben einen Abstand von etwa 4 cm.

Für die elastischen Messingstäbe hat sich eine Länge von 45—50 cm (nicht eingespannter Teil) empfehlenswert erwiesen. Die zur Herstellung der notwendigen Schwingungsdauer erforderliche Gesamtbelastung des Gestells schwankt hierbei etwa von 10—5 kg. Die Gesamthöhe des Apparats, der leicht in einem vollständig dichten Luftschutz eingeschlossen werden kann, beträgt 60—70 cm. Eine geringe Biegung der elastischen Stäbe beeinträchtigt die Wirksamkeit des Apparates nicht. Sie sind übrigens leicht auswechselbar.

Um eine Arretierung des Gestells zu ermöglichen, können die beiden vorderen Gestellstäbe teilweise von horizontal verschiebbaren Gabeln umfaßt werden. Die Gabeln sind mit ihrem hinteren Teile durch eine Schraube auf kleinen Säulen befestigt, die auf der Vorderseite des Grunddreiecks in der

Nähe der Ecken angebracht sind. Die Arretierungsvorrichtung ist in der Figur erkennbar; das Gestell ist arretiert.

Vor Benutzung der Aufstellung wird zunächst das Grunddreieck durch Drehen der Fußschrauben mit Hilfe der Libelle wagerecht gestellt; die elastischen Stäbe stehen dann genau senkrecht. Das frei im Raum schwingende Gestell wird dann außer mit dem Instrument so lange durch Einfüllen von Bleischrot in das Gefäß belastet, bis die Schwingungsdauer (Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Umkehrpunkten) 2 Sek. beträgt. Längere Schwingungsdauern bringen keine Verbesserung und verringern nur die Stabilität der Anordnung, kürzere reichen nur in weniger erschütterten Räumen aus, was aber nur durch besondere Versuche erwiesen werden kann. Durch die Vertikalverstellung der elastischen Stäbe erreicht man, daß das Gestell auch bei unsymmetrischer Belastung stets frei schwingt. Nach Herstellung der notwendigen Schwingungsdauer und dem Anziehen der Schrauben ist die Aufstellung gebrauchsfertig.

Die praktischen Vorteile des Apparates bestehen erstens darin, daß er nach Arretierung des Gestells sofort transportierbar ist, im übrigen auch leicht zusammengesetzt oder auseinandergenommen werden kann. Zweitens ist die Dämpfung durch die in sich geschlossene Dämpfungseinrichtung von vornherein eindeutig geregelt. Drittens ist beim Gebrauch der Aufstellung nur eine einzige Bedingung zu erfüllen, daß nämlich die Schwingungsdauer des Gestells 2 Sek. beträgt.<sup>1)</sup> Diese Forderung kann durch entsprechende Belastung des Gestells leicht erfüllt werden.

#### 7. Zusammenfassung

1. Eine Kritik und experimentelle Prüfung zeigt, daß von den bisher in der Literatur angegebenen Methoden zur Er-

---

1) Hierdurch unterscheidet sich die Aufstellung von einem z. T. auf gleichen Prinzipien beruhenden, sehr einfach gebautem Apparat, der unabhängig von den hier mitgeteilten Versuchen von der Firma Hartmann & Braun zu gleicher Zeit konstruiert wurde. Diese Aufstellung, die keinerlei künstliche Dämpfung besitzt und keine Arretierung aufweist, arbeitet mit kürzeren Schwingungsdauern. Hierdurch sind ihrer Wirksamkeit gewisse Grenzen gezogen.

zielung einer erschütterungsfreien Aufstellung im ganzen die Juliussche Aufhängung die beste ist, daß aber ihre Wirkungsweise bei Beachtung gewisser Punkte noch in vielen Fällen verbessert werden kann.

2. Die Wirkungsweise der Juliusschen Aufhängung wird auf die Theorie der erzwungenen Schwingungen zurückgeführt. Es werden hierdurch verschiedene, teils auch bei anderen Anordnungen auftretende Erscheinungen, über die noch Unklarheiten bestanden, hinreichend erklärt.

3. Zur Dämpfung der Eigenschwingungen wird, da die bisherige Form der Dämpfung oft schädlich wirkt, eine neue Methode ausgearbeitet, die auf der Dämpfung durch innere Reibung von Flüssigkeiten beruht. Die Dämpfungsanlage befindet sich hierbei auf der Aufhängung selbst und steht nicht in Verbindung mit außerhalb der Aufhängung liegenden Körpern.

4. Längere Versuche führen zur Konstruktion einer auf einem Tisch aufstellbaren erschütterungsfreien Aufstellung („Stabaufstellung“). Sie beruht auf folgenden drei Prinzipien:

a) Verzicht auf eine Schwächung der Vertikalkomponente der Erschütterungen.

b) Große Translationsschwingungsdauer in horizontaler Richtung.

c) Verwendung der unter 3. erwähnten Dämpfungsmethode.

Diese Aufstellung ist, auch in höheren Stockwerken, verwendbar auf allen Wandtischen, bei sehr festem Fußboden auch auf freistehenden Tischen. Sie erreicht die Wirkung der Juliusschen Aufhängung, kann sie aber in vielen Fällen übertreffen. Die Aufstellung läßt sich leicht vollständig in einen Luftschutz einschließen und ist ohne weiteres transportabel. Sie ist eisenfrei gebaut und mit einer Arretierung versehen.

Vorstehende Arbeit wurde in den Jahren 1924—1927 im Physikalischen Institut der Universität Berlin ausgeführt. Die Anregung hierzu erhielt ich von Hrn. Geheimrat Professor Dr. W. Nernst, dem ich für sein Interesse an der Arbeit und die Bereitstellung der nötigen Institutsmittel zu besonderem Dank verpflichtet bin. Hr. Privatdozent Dr. Czerny hat mich bei Ausführung der Versuche freundlichst unterstützt,

mir viele wertvolle Anregungen gegeben und die Arbeiten mit großem Interesse verfolgt. Ich möchte ihm hierfür meinen aufrichtigen Dank aussprechen.

Hrn. Professor Pirani habe ich für die Liebenswürdigkeit zu danken, durch die Firma Osram ein Modell der Stab-  
aufstellung für das Institut herstellen zu lassen.

#### 8. Literaturverzeichnis

- 1) Airy, Monthly notices of the Royal Astronomical Society 17. S. 160. 1856.
- 2) A. A. Michelson und Morley, On the relative motion of the earth and the luminiferous ether. The American Journal of Science 3. S. 336—339. 1887.
- 3) H. E. J. G. du Bois und H. Rubens, Modifiziertes astatisches Galvanometer. Wied. Ann. 48. S. 236. 1893; § 4. Zur Erschütterungslosigkeit hängender Systeme.
- 4) W. H. Julius, Über eine Vorrichtung, um Meßinstrumente gegen die Erschütterungen des Bodens zu schützen. Wied. Ann. 56. S. 151. 1895.
- 5) W. Einthoven, Eine Isolationsvorrichtung gegen Erschütterungen der Umgebung. Wied. Ann. 56. S. 161. 1895.
- 6) W. H. Julius, Ein Apparat für erschütterungsfreie Aufstellung. Ztschr. f. Instr. 16. S. 267. 1896.
- 7) D. B. Brace, Note on steady liquid surfaces. Astroph. Journ. 5. S. 214. 1897.
- 8) M. M. Hamy, Principes mécaniques qui ont permis de réaliser un bain de mercure à couche épaisse à l'Observatoire de Paris. Compt. rend. 125. S. 760. 1897.
- 9) W. H. Julius, Demonstration einer Vorrichtung, um Gegenstände gegen den Einfluß vertikaler Erschütterungen zu schützen (Referat). Ztschr. f. Instr. 18. S. 85. 1898.
- 10) Abbot, Annals of the Astrophysical Observatory of the Smithsonian Institution 1. S. 62. 1900.
- 11) M. M. Hamy, Sur l'amortissement des trépidations du sol. Application au bain de mercure à couche épaisse. Compt. rend. 136. S. 990. 1903.
- 12) W. P. White, Sensitive moving coil galvanometer. Phys. Rev. 19. S. 305. 1904; 10. Stability. — The Julius suspension; 11. Stability ob-

tained by flotation on mercury or oil; 12. The jointless-table; 13. Experimental results; 14. Summary.

13) W.H.Julius, Bemerkungen über erschütterungsfreie Aufstellung. Ann. d. Phys. 18. S. 206. 1905.

14) W.P.White, Bemerkungen über die Juliussche Galvanometer-aufhängung. Ann. d. Phys. 22. S. 195. 1907.

15) A P. Carman, A suspension to eliminate mechanical disturbances. Journ. of the Opt. Amer. Soc. 6. S. 694. 1922.

16) A. L. Johnsrud, A suspension for supporting delicate instruments. Journ. of the Opt. Soc. of Amerika 10. S. 609. 1925.

(Eingegangen 15. Januar 1929)

---

**Die Erzeugung  
von kurzwelligem ungedämpften Schwingungen  
bei Anwendung des Magnetfeldes**

**Von A. A. Slutzkin und D. S. Steinberg**

(Mit 7 Figuren)

**Einleitung**

Nach der Methode von Barkhausen und Kurz<sup>1)</sup> ist es bis jetzt<sup>2), 3), 4), 5)</sup> gelungen Wellen von etwa 10 cm Länge zu erzeugen. Wie bekannt, werden die so erzeugten Schwingungen durch die Schwingungsbewegung der Elektronen bei positiven Gitterspannungen hervorgerufen. Auf ähnliche Weise entstehen die Schwingungen, wenn man das Gitter durch ein axiales Magnetfeld ersetzt. Es wurde von Greinacher<sup>6)</sup> (1912) und später von Hull<sup>7)</sup> gezeigt, daß in diesem Falle die Elektronen durch das genügend starke Magnetfeld zur Kathode zurückgebogen werden. Nach dieser Methode gelang es uns schon im Jahre 1925<sup>8)</sup> Schwingungen von 50—200 cm Wellenlänge zu erzeugen und zwar von größerer Intensität als es bei der Schaltung nach Barkhausen und Kurz und beim Verbrauch von gleicher Energie möglich war. Eine ähnliche Art der Schwingungserzeugung wurde von Okabe<sup>9)</sup>, Jagi<sup>10)</sup> und Žáček<sup>11)</sup> beschrieben. Wenn auch die Anwendung eines Magnet-

1) H. Barkhausen u. K. Kurz, Phys. Ztschr. 21. S. 1. 1920.

2) K. Kohl, Ann. d. Phys. 85. S. 1. 1928.

3) E. Hollmann, Ann. d. Phys. 86. S. 129, 1062. 1928.

4) M. T. Grechowa, Ztschr. f. Phys. 35. S. 50. 1926; 38. S. 621. 1926.

5) N. A. Kapzow, Ztschr. f. Phys. 35. S. 129. 1926.

6) H. Greinacher, Verh. d. d. Phys. Ges. 14. S. 556. 1912.

7) A. W. Hull, Phys. Rev. 22. S. 279. 1923; 25. S. 645. 1925.

8) A. Slutzkin u. D. Steinberg, Journ. Russ. Phys.-Chem. Ges. 58. S. 395. 1926.

9) K. Okabe, Journ. Inst. elect. eng. Jap. Nr. 467. June 1927.

10) Jagi, Proc. Inst. Rad. Eng. 16. S. 729. 1928.

11) A. Žáček, J. d. d. Telegraphie u. Telephonie 32. S. 172. 1928.

feldes etwas umständlich ist, so hat man den Vorteil, daß diese Schwingungen mit einer Zweielektrodenröhre erhalten werden und somit der Einfluß der schädlichen Kapazität zwischen Gitter und Anode vermindert wird. Auf solche Weise konnte man zu viel kleineren Wellenlängen gelangen als es bisher nach der Methode von Barkhausen und Kurz möglich war.

#### Erzeugung von Schwingungen

Zur Erzeugung von Schwingungen ist es nötig, daß der Glühfaden der Zweikathodenröhre mit zylindrischer Anode mit der Richtung des Magnetfeldes einen Winkel zwischen  $0^\circ$  und  $10^\circ$  bildet und die positive Spannung an der Anode einige hundert Volt beträgt.

Erhöht man allmählich die Stärke des Magnetfeldes, so treten bei einer bestimmten Feldgröße, wenn die Elektronen nicht mehr zur Anode gelangen können, sprunghafte Schwingungen auf. Dieselben werden mit einem Thermoelement bzw. Detektor oder auch durch die sprunghafte Änderung des Anodenstroms festgestellt.

#### Versuchsanordnung

Es wurde folgende Versuchsanordnung benutzt: Eine Zweielektrodenröhre mit einer zylindrischen Anode aus unmagnetischem Material (gewöhnlich Tantal) und einem geradlinigen

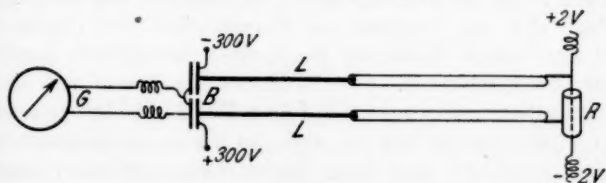


Fig. 1

Faden wurde zwischen den Polen eines Elektromagneten von du Bois um zwei zum magnetischen Felde senkrechten Achsen drehbar aufgestellt, so daß es möglich war verschiedene Neigung zwischen dem Faden und dem Magnetfelde zu erzielen. Der Faden wurde durch eine Akkumulatorenbatterie von 6 Volt geheizt und der Heizstrom durch zwei Drosselspulen zugeleitet.

An den Zuleitungen zum Glühfaden und zur Anode wurden zwei Kupferröhren von 5 mm Durchmesser angelötet, die im Abstande von 2 cm parallel verliefen. In diesen Röhren bewegten sich zwei Stäbe  $LL$ , die durch einen Kondensator  $B$  überbrückt waren (vgl. Fig. 1). Der letztere bestand aus zwei in Serienfolge geschalteten Kondensatoren von je einigen 100 cm Kapazität, die durch einen Konstantendraht von 0,02 mm Durchmesser und 2 cm Länge miteinander verbunden waren. In der Mitte des Konstantendrahtes war ein Eisendraht von derselben Dicke angelötet. Der Thermostrom wurde durch ein Galvanometer  $G$  gemessen, und die Anodenspannung unmittelbar zu dem Überbrückungskondensator geführt.

#### Die Messung der Wellenlängen

Zur Messung der Wellenlängen diente ein besonderes Lechersystem, das aus zwei Messingdrähten  $LL$  (vgl. Fig. 2) von

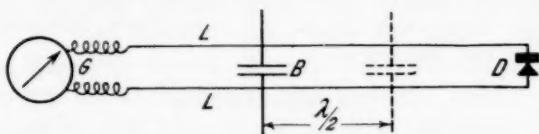


Fig. 2

1,5 mm Dicke im Abstande von 2 cm bestand. Am einen Ende befand sich der Detektor aus Ferrosilicium und Stahldraht, und das andere Ende war durch einen beweglichen Kondensator kurzgeschlossen. Der Detektorstrom wurde mit einem Spiegelgalvanometer von  $2 \cdot 10^{-7}$  Amp. Empfindlichkeit gemessen. Das Lechersystem war so weit (bis 4 m) vom Schwingungskreise aufgestellt, daß keine Rückwirkung stattfinden konnte.

#### Die Schwingungsintensität

Die Intensität der Schwingungen wurde aus der Stromstärke ermittelt, die in dem im ersten oder zweiten Wellenbauch befindlichen Überbrückungskondensator gemessen wurde. Wenngleich die den Röhren zugeführte Energie nicht über etwa 4 Watt erhöht werden konnte, erhielt man leicht für Wellenlängen von etwa 30–50 cm Schwingungsströme von



einigen Zehnern Milliampere. Bei kürzeren Wellen war die Stromstärke viel kleiner, was sich nicht durch eine Verminderung der Schwingungsenergie erklären läßt, sondern durch die viel kleinere Koppelung der im Innern der Röhre befindlichen Schwingungskreise mit dem Lecherschen System. (Vgl. unten: „Erzeugung sehr kurzer Wellen“.) Es erwies sich auch, daß die Schwingungsintensität sehr stark vom Winkel zwischen dem Glühfaden und der Richtung des Magnetfeldes abhängig war.

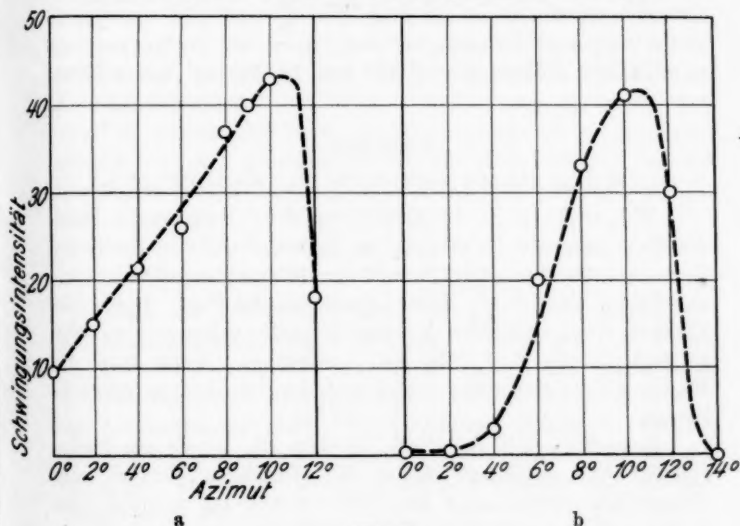


Fig. 3

Wie aus der Fig. 3a ersichtlich ist, sind die Schwingungen am schwächsten bei der zum Felde parallelen Einstellung des Fadens. Bei Drehung der Röhre wachsen die Schwingungen rasch an und erreichen ein Maximum bei einem Winkel von  $10,5^\circ$ . Bei größeren Drehungen fallen sie scharf ab und verschwinden bei  $14^\circ$  vollkommen. Je regelmäßiger die Röhre gebaut ist, d. h. je vollkommener die Zylinderform der Anode und die axiale Anordnung des Glühfadens, desto intensiver werden die Schwingungen bei der zum Felde parallelen Einstellung der Röhre. Dagegen ist es unmöglich in unregelmäßig gebauten Röhren Schwingungen anzuregen, wenn der Winkel

zwischen Faden und Magnetfeld klein ist. Doch erhält man auch in diesem Falle bei Drehung der Röhre ein starkes Anwachsen der Schwingungen, wobei das Maximum fast dieselbe Größe, wie in regelmäßig gebauten Röhren erreicht. Dies veranschaulicht die Fig. 3b, wo die Schwingungsintensitäten bei einer unsymmetrischen Röhre eingetragen sind, wenn man sie mit der Fig. 3a vergleicht, die für eine bessere Röhre gilt. Es ist von Interesse die Tatsache hervorzuheben, daß das Intensitätsmaximum immer dem Winkel von  $9-11^\circ$  entsprach, unabhängig vom Durchmesser der Anode, der in den von uns untersuchten Röhren eine Größe von 12, 10 und 6 mm hatte.

### Wellenlänge

#### a) Angenäherte Berechnung der Wellenlänge

Wie erwähnt, ist die Entstehung der Schwingungen durch die Bewegung der Elektronen im Innern der Röhre bestimmt. Zur angenäherten Berechnung der Schwingungszeit ist anzunehmen, daß deren Hälfte gleich ist der Zeit, in der ein Elektron vom Glühfaden bis zum Umkehrpunkte seiner Bahn verläuft. Diese Zeit läßt sich ausrechnen, wenn man die Wirkung des Schwingungsfeldes und der Raumladung vernachlässigt.

Betrachten wir den Fall, in dem die Anode ein Kreiszylinder ist, in dessen Achse der Glühfaden parallel zum Magnetfelde ausgespannt ist. Die  $z$ -Achse sei parallel zum Faden und das elektrische Feld senkrecht dazu gerichtet.

Die radiale Geschwindigkeit des Elektrons ist dann, wie bekannt, durch die folgende Gleichung gegeben

$$(1) \quad \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{2 \frac{e}{m} (A + B \lg r) - \frac{1}{4} \left( \frac{e}{m} \right)^2 H^2 \left( r - \frac{r_0^2}{r} \right)^2}.$$

Die halbe Schwingungszeit berechnet man dann, indem man die Gleichung (1) integriert und als Integrationsgrenzen den Fadenradius  $r_0$  und die maximale Entfernung  $r_{\max}$  des Elektrons von der Achse wählt. Die Größe  $r_{\max}$  bestimmt man, indem

$$2 \frac{e}{m} (A + B \lg r_{\max}) - \frac{1}{4} \left( \frac{e}{m} \right)^2 H^2 \left( r - \frac{r_0^2}{r} \right)^2 = 0$$

gesetzt wird. Es ist also

$$(2) \quad \frac{T}{2} = \int_{r_0}^{r_{\max}} \frac{dr}{\sqrt{2 \frac{e}{m} (A + B \lg r) - \frac{1}{4} \left(\frac{e}{m}\right)^2 H^2 \left(r - \frac{r_0^2}{r}\right)^2}}.$$

Die nach dieser Formel berechneten Wellenlängen sind im allgemeinen kleiner als die beobachteten, die Übereinstimmung ist aber um so besser je größer die Stärke des beschleunigenden Feldes ist, d. h. je größer die Spannung an der Anode und je kleiner der Anodendurchmesser. Bei einem Anodendurchmesser von 12 mm und einer Spannung von 100 Volt beträgt die berechnete Wellenlänge 74 cm, die beobachtete 123 cm. Dagegen bei 3 mm und 780 Volt ist die berechnete Wellenlänge 7,4 cm und die beobachtete 7,3 cm.

b) Die Abhängigkeit der Wellenlänge  
von Anodenspannung, Magnetfeld und Heizstrom

Nach der Formel (2) muß die Erhöhung der Spannung und der Magnetfeldstärke die Wellenlänge vermindern. Tab. 1 veranschaulicht in der Tat eine Abhängigkeit der Wellenlänge von der Spannung in diesem Sinne bei verschiedenen Größen des Anodendurchmessers. Die Wellenlänge fällt etwas schneller ab als umgekehrt proportional mit der Quadratwurzel aus der Spannung und zwar desto schneller je kleiner der Anodendurchmesser ist.

Tabelle 1

Die Abhängigkeit der Wellenlänge von der Anodenspannung

Anodendurchmesser 10 mm		Anodendurchmesser 6 mm		Anodendurchmesser 3 mm		
Spannung	Wellenlänge	Spannung	Wellenlänge	Spannung	Magnetfeld	Wellenlänge
Volt	cm	Volt	cm	Volt	Gauss	cm
203	85,4	130	78,6	200	720	19,7
232	77,8	170	60,1	282	880	16,6
270	71,4	210	50,0	447	1110	11,9
318	62,8	253	44,0	540	?	9,8
360	56,4	290	31,2	700	1645	7,8
411	48,4	232	28,1	780	1617	7,3

Röhren mit ziemlich großen Anodendurchmessern (12 bis 6 mm) erzeugen bei verhältnismäßig kleinen Spannungen Schwingungen, nur wenn das Magnetfeld bis auf einige Pro-zente dem kritischen Werte gleichkommt, das heißt demjenigen bei dem der Anodenstrom abfällt. Bei weiterer Verstärkung des Feldes verschwinden die Schwingungen vollständig. Somit

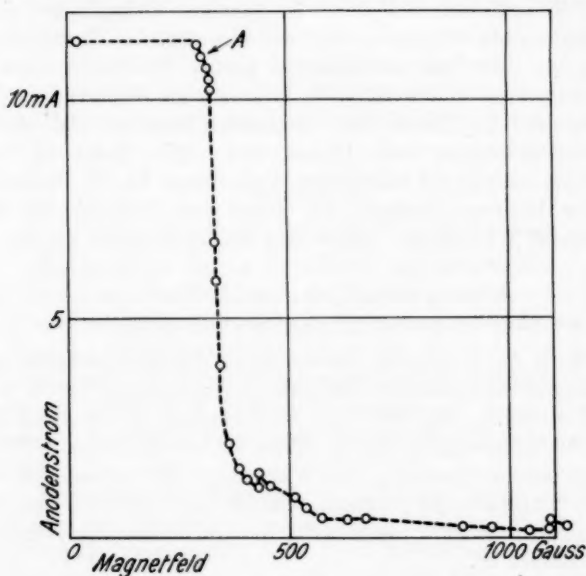


Fig. 4

umfaßt der günstige Feldstärkebereich nur einige Gausseinheiten. Die Fig. 4 gibt die magnetische Charakteristik einer Zweielektrodenröhre, d. h. die Abhängigkeit des Anodenstroms vom Magnetfelde. Durch *A* ist derjenige Punkt auf der Charakteristik bezeichnet, wo die Schwingungen auftreten.

Nur in Röhren mit kleinem Anodendurchmesser und bei genügend hohen Spannungen kann das Magnetfeld im Bereiche von einigen hundert Gauss variiert und die Abhängigkeit der Wellenlänge von der Feldstärke bestimmt werden. In der Tab. 2 sind die Wellenlängen angegeben für eine Röhre mit Anodendurchmesser von 3 mm und einer Anodenspannung von 399 Volt.

Tabelle 2

Schwingungen in einer Zweielektrodenröhre ( $d_a = 3 \text{ mm}$ )  
bei 399 Volt Anodenspannung

Magnetfeld Gauss	Wellenlängen cm
1070	12,5
1113	9,9
1274	9,4
1425	8,6

Man sieht, daß die Verstärkung des Magnetfeldes die Wellenlänge in dem Sinne der Formel (2) vermindert. Bei weiterer Erhöhung des Feldes tritt ein bemerkenswerter Umstand hervor: es treten sprungweise Schwingungen auf, deren Wellenlänge einige Zehner mal größer ist als bei Schwingungen, die mit kleineren Magnetfeldern erzeugt sind. Diese Erscheinung wurde nicht näher untersucht.

Bei schwachen elektrischen Feldern war die Wellenlänge ziemlich stark von der Heizstromstärke beeinflusst, was augenscheinlich durch den zunehmenden Einfluß der Raumladung zu erklären ist. Diese Abhängigkeit ist in der Tab. 3 wiedergegeben. Die Wellenlänge wird durch die Erniedrigung der Heizung vermindert, im Gegensatz zu den Verhältnissen, die bei den nach Barkhausen und Kurz erzeugten Schwingungen auftreten.

Tabelle 3

Die Abhängigkeit der Wellenlänge vom Heizstrom  
 $d_a = 10 \text{ mm}$ ;  $E_a = 304 \text{ Volt}$

Emissionsstrom mA	Wellenlänge cm
15,0	75,5
10,8	72,7
7,6	66,9
3,7	62,2

#### Der Einfluß des Außenkreises

Wie die Arbeiten von Gill und Morell<sup>1)</sup>, Grechowa<sup>2)</sup>, Kapzow<sup>3)</sup> und Hollmann<sup>4)</sup> gezeigt haben, gibt es Fälle, wo

1) E. W. B. Gill u. J. H. Morell, Phil. Mag. 44. S. 162. 1922; 49. S. 369. 1925.

2), 3), 4) a. a. O.

die Wellenlänge von dem äußeren Schwingungskreise fast unabhängig ist, und solche (der von Gill und Morell untersuchte Fall), bei denen die Wellenlänge durch die Dimensionen des äußeren Kreises bestimmt wird. Um in dieser Richtung für unseren Fall eine Klärung zu bringen bestimmten wir die

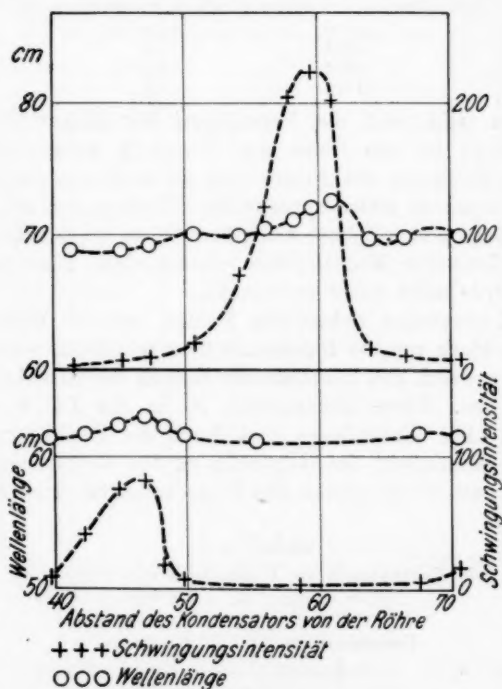


Fig. 5

Wellenlänge bei verschiedenen Lagen des Kondensators bei Konstanthaltung der Spannung und des Magnetfeldes. Die Ergebnisse sind in Fig. 5 zusammengestellt, wo auf der Abszissenachse die Abstände des Kondensators von der Röhre, auf der Ordinatenachse die Wellenlängen und Schwingungsintensitäten aufgetragen sind. Die obere Kurve gilt für einen Emissionsstrom von 17 mA, die untere für den dreimal schwächeren. Aus den Zeichnungen ist Folgendes zu ersehen.

Während die Schwingungsintensitäten sehr stark von der Lage des Kondensators abhängen, ist das für die Wellenlängen nicht der Fall. Bei stärkeren Schwingungen tritt dabei eine Verlängerung der Wellen etwas mehr hervor, als bei schwächeren Emissionsströmen, wo der Einfluß des Außenkreises sich nur wenig geltend macht. Somit haben wir hier einen Fall bei dem die Dimensionen des Außenkreises nur geringen Einfluß auf die Wellenlänge haben.

#### Erzeugung der kürzesten Wellen

Zur Erzeugung sehr kurzer Wellen benutzten wir eine Röhre mit Anodendurchmesser von 3 mm, da Röhren mit größerem Anodendurchmesser so hohe Spannungen beanspruchen, wie sie uns nicht zur Verfügung standen. Da sich die Asymmetrie von Röhren bei kleinem Anodendurchmesser besonders

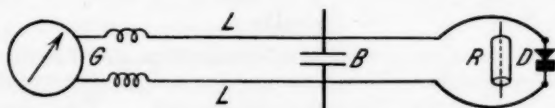


Fig. 6

scharf geltend macht, fanden wir es nötig zur Erzeugung von Schwingungen genügender Intensität den Winkel zwischen Fadenrichtung und Magnetfeld nicht kleiner als  $3-4^\circ$  zu wählen.

Bei Erzeugung ganz kurzer Wellenlängen ist es ratsam das Lechersche System mit den Zuleitungen zu den Elektroden nicht direkt zu verbinden, wie es bei der Anwendung der Barkhausen-Kurzschens Methode von Prof. D. A. Roschansky dargetan wurde.<sup>1)</sup> Wir hatten daher unser Lechersystem  $LL$  (vgl. Fig. 6), das zu Wellenbestimmungen dient, nach Roschansky induktiv mit der Röhre gekoppelt. Das eine Ende des Lechersystems wurde durch einen Krystalldetektor geschlossen; von der anderen Seite eine verschiebbare Kapazitätsbrücke angebracht. Die freien Enden vom Lechersystem sind mit einem Spiegelgalvanometer verbunden.

<sup>1)</sup> A. Roschanski, Compt. rend. de l'ac. des Sciences d. U. S. S. R. 1928.

Diese Anordnung erwies sich als sehr bequem bei der Arbeit mit sehr kurzen Wellen. Von den zehn Röhren, die uns zur Verfügung standen, konnten wir nur mit einer einzigen, die einen sehr verbogenen Faden hatte, überhaupt keine kurzen Wellenlängen von genügender Intensität erzeugen. In den übrigen gelang es leicht, wobei, wie aus Tab. 4 ersichtlich ist, ihre Intensität bei Wellenlängenverkleinerung stieg. Bei Ausführung dieser Messungen blieb die der Röhre zugeführte Energie immer dieselbe (etwa 3 Watt), indem die Heizung des Fadens bei den höheren Spannungen entsprechend erniedrigt wurde. Da uns noch höhere Spannungen nicht zur Verfügung standen, konnten wir nicht kürzere Wellen erhalten, doch nach dem Intensitätsverlauf zu urteilen, kann man bestimmt behaupten, daß die beschriebene Methode noch bedeutend kürzere Wellen zu erzeugen gestattet.

Tabelle 4

Schwingungen in einer Zweielektrodenröhre ( $d_a = 3$  mm)

Spannung Volt	Magnetfeld- stärke Gauss	Emissions- strom mA	Schwingsungs- intensität Skt.	Wellenlänge	
				Beob. cm	Ber. cm
200	720	13,3	55	19,7	
282	880	10,7	31	16,6	14,4
447	1145	7,1	70	11,9	
540	1309	5,3	150	9,8	9,4
700	1645	4,7	180	7,8	
780	1617	4,7	340	7,3	7,4

Alle diese Versuche wurden mit speziell zu diesem Zweck hergestellten Röhren ausgeführt. Von Interesse für die weite Anwendung kurzer Wellen im Laboratorium war ihre Erzeugung durch käufliche Röhren. Zu diesem Zweck untersuchten wir eine Verstärkungsrohre des russischen Schwachstromtrasts vom Typus R 5, wobei das Gitter als Anode benutzt wurde. Die Anode blieb entweder nicht angeschlossen, oder mit dem Faden durch negative Hilfsspannung verbunden. Es erwies sich, daß man kurze Wellen auch in solchen Röhren erzeugen kann, wenn der Faden genügend symmetrisch aufgespannt ist. Die mit einer solchen Röhre erhaltenen Ergebnisse sind in der Tab. 5 zusammengestellt.



Tabelle 5

Schwingungen in einer R-5-Röhre

Spannung Volt	Magnetfeld Gauss	Intensität Skt.	Wellenlänge cm
200	748	8	16,7
250	930	50	13,6
300	1060	60	12,4
350	1102	8	11,8
427	1260	30	11,0
460	1362	22	9,7
506	1397	2	9,0
586	?	35	8,3
667	1951	10	7,1

Aus dem Vergleich der mit Röhren R 5 (gitterförmige Anode) und derjenigen mit Zweielektrodenröhren und voller Anode erhaltenen Ergebnisse ergab es sich, daß die Länge der in R 5 erzeugten Wellen etwas kürzer ist als in Zweielektrodenröhren mit einem Anodendurchmesser von 3 mm, doch ist auch die Schwingungsintensität um ein Vielfaches kleiner. Die Erzeugung kurzer Wellen in R 5 war durch den Umstand erschwert, daß beim sprunghaften Einsetzen der Schwingungen der Anodenstrom sehr stark anwächst, was wohl in der zusätzlichen Heizung des Fadens durch den Schwingungsstrom seinen Grund hat. Schon mit bloßem Auge konnte

man die Zunahme der Helligkeit des Fadens im Augenblick, wo die Schwingungen auftraten, bemerken. Infolge so scharfer Zunahme der Fadenheizung verbrannte der Faden oft. Das erschwerte die Arbeit mit Röhren R 5 natürlich sehr. Um eine derartige Wirkung der Schwingungen zu vermindern, gebrauchen wir in den von uns gebauten Zweielektrodenröhren Zuleitungen, die auf Fig. 7 abgebildet sind. Dadurch wurde die Kopplung zwischen Spannungs- und Heizstromzuleitungen soweit wie möglich geschwächt und die Gefahr der Heizstromzunahme fast völlig ausgeschlossen. Im Augenblick, wo die

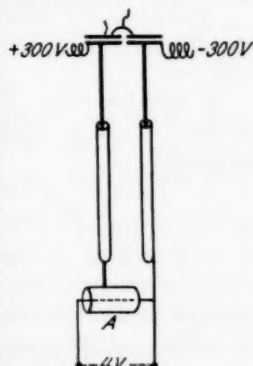


Fig. 7

Schwingungen auftraten, nahm der Anodenstrom freilich etwas zu, doch betrug diese Zunahme nicht mehr als 10—20 Proz. Mit solchen Röhren konnte man stundenlang vollkommen ruhig arbeiten und erhielt ganz stabile Schwingungen.

#### Zusammenfassung

1. Es wurde eine Methode ausgearbeitet zur Erzeugung von kurzwelligen Schwingungen in Zweielektrodenröhren bei Anwendung eines Magnetfeldes.

2. Es wurde gezeigt, daß ein angenäherter Wert der Wellenlänge durch die Berechnung der Flugzeit der Elektronen gefunden werden kann.

3. Es wurde die Abhängigkeit der Wellenlänge von der Spannung, der Magnetfeldstärke und der Heizung untersucht.

4. Es wurde auch die Abhängigkeit der Schwingungsintensität von der Einstellung der Röhre im Magnetfelde untersucht.

5. Mit besonders dazu gebauten Röhren erwies es sich möglich, intensive Schwingungen bis 7 cm Wellenlänge zu erzeugen.

6. Es wurde gezeigt, daß extrem kurze Wellen auch in käuflichen Dreielektrodenröhren zu erhalten sind.

Zum Schluß möchten wir Hrn. Prof. D. A. Roschansky unseren wärmsten Dank aussprechen für das fördernde Interesse, das er dieser Arbeit entgegengebracht hat.

Charkow, Physikalisches Forschungsinstitut.

(Eingegangen 18. Januar 1929)

---

## Über den Nachhall in geschlossenen Räumen

Von K. Schuster und E. Waetzmann

Mit 3 Figuren

### § 1. Fragestellung

Es ist bekannt, daß für die „Akustik“ oder die „Hörsamkeit“ eines Raumes der Nachhall eine wichtige Rolle spielt. Während im Freien (Naturbühne, Waldoper) die Nachhalldauer oft zu kurz ist, ist sie in geschlossenen, namentlich sehr großen Räumen in der Regel zu lang. Im ersten Falle klingen Sprache und Musik „leer“, der Schall „verweht“; im zweiten Falle wird er „hallend“ und „verwaschen“. Im Freien müssen deshalb künstliche Mittel angewendet werden, um die Nachhalldauer zu vergrößern, während in geschlossenen Räumen die Dämpfung künstlich gesteigert wird, um die Nachhalldauer herabzusetzen.

*Im folgenden soll erstens versucht werden, eine exakte Ableitung für die Größe der Nachhalldauer zu geben, und es soll zweitens diskutiert werden, welche Nachhalldauer die günstigste ist.*

Formeln, die den Vorgang des Nachhallens beherrschen, sind bereits von W. C. Sabine<sup>1)</sup> abgeleitet worden. Wird eine Schallquelle von gleichbleibender Intensität in Tätigkeit gesetzt, so stellt sich in ganz kurzer Zeit (deren Dauer von der Größe des Raumes abhängt) eine konstante Energiedichte  $E_0$  ein. Bedeutet  $L$  die Leistung der Schallquelle,  $F$  die gesamte Flächengröße der Raumbegrenzung,  $a_m$  ihren mittleren Absorptions- oder Dämpfungskoeffizienten, der durch die Beziehung  $a_m F = \sum_k a_k F_k$  definiert sei — wobei die  $a_k$  die Ab-

1) W. C. Sabine, Collected papers on acoustics, Cambridge Harvard University Press, 1923. Es sei ferner verwiesen auf G. Jäger, Wiener Akad.-Ber. Mathem.-naturw. Kl. Bd. 120, Abt. IIa Mai 1911 und auf J. B. Crandall, Theory of vibrating systems and sound, New York und London 1927.

sorptionskoeffizienten der einzelnen Flächenstücke  $F_k$  sind — und  $c$  die Schallgeschwindigkeit, so berechnet sich  $E_0$  zu:

$$(1) \quad E_0 = \frac{4 L}{c a_m F}.$$

Wird nun in einem bestimmten Zeitmoment  $t = 0$  die Schallquelle abgestellt, so ist die Energiedichte  $E$  zurzeit  $t$ :

$$(2) \quad E = E_0 e^{-\frac{c a_m F}{4 V} \cdot t},$$

wenn  $V$  das Luftraumvolumen bedeutet. Führen wir für  $\frac{c a_m F}{8 V}$  noch die Bezeichnung  $\delta$  (Dämpfung) ein, so nimmt (2) die Form an:

$$(2') \quad E = E_0 e^{-2\delta t}.$$

Definieren wir mit W. Sabine die Nachhalldauer  $T$  als diejenige Zeit, innerhalb deren eine ursprüngliche Schalldichte von  $10^6$  Reizschwelleneinheiten auf den Schwellenwert herabsinkt, so folgt aus (2) für  $c \sim 340$  m/sec:

$$(3) \quad T = 0,163 \frac{V}{a_m F}$$

oder

$$(3') \quad T = \frac{1}{2\delta} \cdot 13,8.$$

Die Formeln gelten nur unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen. Die Schallstrahlen (Schallbündel) sollen den Raum nach allen Richtungen hin gleichmäßig durchsetzen, die Schallbewegung soll eine völlig ungeordnete sein. Schallkonzentrationen (infolge hohlgekrümmter Flächen) oder sonstige Besonderheiten sollen nicht auftreten. Ferner steckt in den Formeln die Voraussetzung, daß  $a_m \ll 1$  ist. In der Praxis ist aber diese Voraussetzung in der Regel nicht erfüllt. Deshalb sind die in der Literatur angegebenen  $T$ -Werte für Räume mit anerkannt guter Hörsamkeit mit erheblichen Fehlern behaftet. Die Formeln müssen berichtigt werden, indem  $a_m$  durch eine Größe  $a_m'$  ersetzt wird, die durch die Beziehung

$$(4) \quad a_m' = -\ln(1 - a_m)$$

definiert ist.<sup>1)</sup> Die Sabin'sche Nachhalldauer  $T$  schreibt sich dann:

$$(5) \quad T = 0,163 \cdot \frac{V}{a_m' F}.$$

1) Vgl. den Abschnitt „Raum- u. Bauakustik“ in dem Akustikband des Lehrbuches von Müller-Pouillet. Vgl. auch A. D. Fokker, *Physica* 4. S. 262. 1924.

Mit dieser berichtigten Formel errechnet sich beispielsweise die Nachhalldauer in dem Gewandhausaal in Leipzig zu etwa 2,0 Sek., während sie in der Literatur mit 2,3 Sek. angegeben wird. Die Einzeldaten für die Berechnung finden sich in dem zitierten Buche von W. C. Sabine. Als zweites Beispiel sei die New Music Hall in Boston genannt, für die Sabine, Watson und Lifschitz  $T$  zu 2,3 Sek. angeben, während sich nach Formel (5) etwa 1,9 Sek. ergibt. Diese Zahlenbeispiele mögen davor warnen, die  $T$ -Werte, wie es vielfach geschieht, womöglich bis auf die zweite Dezimale anzugeben.

In einer Arbeit von P. Sabine<sup>1)</sup> wird die Nachhalldauer anders definiert als bei W. Sabine. Während W. Sabine die Anfangsintensität (mit  $10^6$  Schwelleneinheiten) vorgibt, gibt P. Sabine die Schalleistung vor.

Die bisher übliche Herleitung der Formeln an dieser Stelle genauer zu skizzieren, würde natürlich zu weit führen. Es kann nur gesagt werden, daß sie unbefriedigend ist; der Verlauf eines einzelnen Schallstrahles in dem Raume wird verfolgt, die Energieverluste bei den Reflexionen an den Wänden werden in Reihen dargestellt, und die Ergebnisse, die für einen Schallstrahl gewonnen sind, werden auf die Schalldichte übertragen. Korrekterweise sollte man von der Wellengleichung ausgehen. Deshalb wurde versucht, die Berechnung der Nachhalldauer als Randwertproblem der Wellenausbreitung des Schalles zu formulieren. In analoger Weise haben die Verfasser<sup>2)</sup> die Koppelschwingungen kontinuierlicher Systeme als Randwertaufgaben für die Schwingungs- bzw. Wellengleichungen in den Einzelsystemen behandelt.

Ist ein exakter Weg zur theoretischen Herleitung der Nachhalldauer gegeben<sup>3)</sup>, so kann die weitere Frage nach der für die Hörsamkeit günstigsten Nachhalldauer  $T_{\text{opt}}$  behandelt werden. Vor allem ist zu prüfen, ob  $T_{\text{opt}}$  mit  $V$  variiert, und bejahendenfalls, in welcher Weise das geschieht.

1) P. E. Sabine, „Acoustics in Auditorium Design“, Am. Architect, 1924.

2) E. Waetzmann und K. Schuster, Ann. d. Phys. 84. S. 507. 1927.

3) Zur experimentellen Bestimmung der Nachhalldauer vgl. E. Meyer u. P. Just, Elektr. Nachr.-Techn. (ENT) 5. S. 293. 1928.

§ 2. Die Berechnung der Nachhalldauer als Randwertaufgabe<sup>1)</sup>

Der Nachhall ist die freie, gedämpfte Schwingung eines Luftvolumens, also eines dreidimensionalen Kontinuums. Es handelt sich um freie Schwingungen, da nach Abschalten der Schallquelle an keiner Stelle des Raumes äußere Kräfte auf die Luftteilchen wirken. Da ferner von Energieverlusten durch innere Reibung, Wärmeleitung usw. abgesehen werden kann, ist die Dämpfung keine innere Dämpfung, die sich in der Differentialgleichung der Wellenbewegung durch das Auftreten eines Zusatzgliedes bemerkbar machen würde, sondern es ist eine äußere (Oberflächen-) Dämpfung, die in der besonderen Form der Randbedingungen zum Ausdruck kommt.

Die gestellte Aufgabe ist folgendermaßen zu formulieren: Für  $t = 0$  ist das Geschwindigkeitspotential  $\varphi$  und seine zeitliche Ableitung  $\dot{\varphi}$  im ganzen Raume gegeben. Gefragt wird nach dem Verlauf des Abklingvorganges, d. h. das Potential  $\varphi$ , das der Wellengleichung und besonderen Randbedingungen unterliegt, muß als Funktion von Ort und Zeit gefunden werden. Der gesamte Vorgang wird in Eigenschwingungen des Luftraumes zerlegt (Bernoullische Lösung). Es interessiert dann die Lage der Eigentöne, die Größe ihrer Dämpfungen (und damit der Nachhalldauer) und die zugehörigen Amplitudenverteilungen im Raume (Eigenfunktionen). Endlich wäre die Frage zu diskutieren, in welcher Stärke die einzelnen Eigentöne bei der vorgegebenen Anfangskonstellation ( $\varphi$  und  $\dot{\varphi}$  für  $t = 0$ ) angeregt werden. Vor dem Abschalten der Schallquelle schwingt die Luftmasse in erzwungenen Schwingungen, und es bildet sich im stationären Zustande eine bestimmte Amplitudenverteilung im Raume aus. Vom Moment des Abschaltens an klingt die Luftmasse in ihren Eigenschwingungen ab, deren Einzelamplituden allein durch die im Moment des Abschaltens ( $t = 0$ ) vorhandene Konstellation gegeben sind. Wenn im besonderen einige wenige, verhältnismäßig nahe beieinander liegende Eigentöne angeregt werden, muß die Abklingungskurve die Gestalt einer unregelmäßigen Schwebungs-

1) Für einige wertvolle Hinweise bei der Durchführung der Rechnung haben wir Hrn. F. Reiche herzlich zu danken.

kurve annehmen. Das ist auch experimentell beobachtet worden, ohne daß bisher eine befriedigende Erklärung für dieses Phänomen gegeben wurde.

§ 3. Eindimensionales Problem; der Nachhall in einem geschlossenen Rohr

Als einfachsten Fall betrachten wir zunächst den eindimensionalen Fall einer Wellenbewegung zwischen zwei parallelen Wänden, wenn die Schwingungen nur senkrecht zu den Wänden erfolgen. Um die Randbedingungen ansetzen zu können, müssen wir den akustischen Widerstand an den Wänden kennen. Der akustische Widerstand an einer Fläche (Flächennormale  $\nu$ ) soll definiert sein als das — im allgemeinen komplexe — Verhältnis der Druckschwankung  $p - p_0 = \varrho \dot{\psi}$  ( $\varrho$  = Dichte der Luft) zur Normalgeschwindigkeit —  $\text{grad}_\nu \psi$  an dieser Fläche. Praktisch vorgegeben ist aber nicht der akustische Widerstand, sondern der Absorptionskoeffizient der Wand. Es muß also eine Beziehung zwischen beiden Größen aufgestellt werden. Wir betrachten zu diesem Zweck den Wellenvorgang, wenn nur eine einzige Wand vorhanden ist. Die Welle besteht aus einem hin- und einem zurücklaufenden ebenen Wellenzuge. An der Ebene selbst soll der akustische Widerstand  $\mathfrak{R} = w + i q$  vorgeschrieben sein. Der Reflexionskoeffizient der Wand (Verhältnis der reflektierten zur einfallenden Energie) ist gleich dem Quadrat des absoluten Betrages des Amplitudenverhältnisses der beiden Wellenzüge an der Wand. Der Absorptionskoeffizient (Verhältnis der nicht-reflektierten zur einfallenden Energie), den wir in den Rechnungen dieses und der beiden folgenden Paragraphen nicht mit  $a_m$  sondern mit  $a$  bezeichnen, ist die Ergänzung des Reflexionskoeffizienten zu 1. Ist  $c$  die Schallgeschwindigkeit in Luft, so erhält man:

$$(6a) \quad \frac{w}{\varrho c} = \frac{a}{2 - 2 \cos \vartheta \cdot \sqrt{1 - a - a}},$$

$$(6b) \quad \frac{q}{\varrho c} = \frac{2 \sin \vartheta \cdot \sqrt{1 - a}}{2 - 2 \cos \vartheta \cdot \sqrt{1 - a - a}}.$$

Dabei ist  $\vartheta$  der Phasenwinkel zwischen beiden Wellenzügen in der Ebene der reflektierenden Wand. Durch den Absorp-

tionskoeffizienten ist also der akustische Widerstand noch nicht eindeutig gegeben; es müssen noch die Verhältnisse hinter der Wand bekannt sein.

Ist z. B. hinter der Wand überhaupt keine Welle mehr vorhanden, ist also  $a = 0$ , so wird

$$\frac{w}{c \varrho} = 0,$$

$$\frac{q}{c \varrho} = \cotg \frac{\vartheta}{2}.$$

Dieser Fall interessiert uns hier nicht, da bei vollkommen reflektierenden Wänden und unter Vernachlässigung der Absorption in Luft der Schall überhaupt nicht abklingen würde.

Nehmen wir jetzt einmal die Wand als unendlich dick an, so ist hinter der Grenzfläche nur eine einzige (fortschreitende) Welle vorhanden. Dann wird  $\sin \vartheta = 0$ , und infolgedessen wird

$$\frac{w}{c \varrho} = \frac{1 \pm \sqrt{1-a}}{1 \mp \sqrt{1-a}}$$

und

$$\frac{q}{c \varrho} = 0.$$

Die oberen Vorzeichen gelten für  $\vartheta = 0$ , die unteren für  $\vartheta = \pi$ . Dieser Spezialfall  $q = 0$  stellt den einfachsten Fall einer Wanddämpfung dar.

Lösen wir die Gleichungen (6) nach  $a$  und  $\vartheta$  auf, so erhalten wir:

$$(7a) \quad 1 - a = \frac{q^2 + (w - c \varrho)^2}{q^2 + (w + c \varrho)^2},$$

$$(7b) \quad \tg \vartheta = \frac{2q \cdot c \varrho}{q^2 + (w + c \varrho)(w - c \varrho)}.$$

Daß der Energieverlust an den Wänden beim wirklichen Nachhall durchaus nicht nur durch Abwanderung von Schallenergie nach außen, sondern in erster Linie durch Umwandlung von Schallenergie in Wärme hervorgerufen wird, spielt für die Vorgänge in dem betrachteten Raume selbst keine Rolle.

Die obige Definition des akustischen Widerstandes  $\mathfrak{R}$  können wir in der Form einer Randbedingung für  $\varphi$  folgendermaßen schreiben:

$$\varrho \dot{\varphi} + \mathfrak{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0.$$

Wir wollen jetzt den Abklingungsvorgang zwischen zwei parallelen Wänden untersuchen. Befinden sich die Wände an



den Stellen  $x = -\frac{1}{2}l$  und  $x = +\frac{1}{2}l$  und wird an ihnen der Widerstand  $\mathfrak{B}$  vorgeschrieben, so lauten die Randbedingungen:

Für  $x = -\frac{1}{2}l$ :

$$\rho \dot{\varphi} - \mathfrak{B} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

und für  $x = +\frac{1}{2}l$ :

$$\rho \dot{\varphi} + \mathfrak{B} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Wir machen den Ansatz:

$$\varphi = e^{-\delta t} \cdot e^{i\omega t} \cdot \psi(x),$$

$$\psi(x) = A \cdot e^{-sx} \cdot e^{+ikx} + B \cdot e^{+sx} \cdot e^{-ikx}.$$

Dabei ist  $\omega$  die Kreisfrequenz,  $\delta$  die Dämpfung,  $k$  die Wellenzahl  $\frac{\omega}{c}$  und  $s = \frac{\delta}{c}$ . Die beiden Randbedingungen liefern die Beziehung:

$$\frac{(\dot{\varphi})_{-\frac{1}{2}l}}{(\dot{\varphi})_{+\frac{1}{2}l}} = - \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{-\frac{1}{2}l}}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{+\frac{1}{2}l}}$$

oder

$$(\psi)_{-\frac{1}{2}l} \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{+\frac{1}{2}l} = - (\psi)_{+\frac{1}{2}l} \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{-\frac{1}{2}l}.$$

Durch Einsetzen von  $\psi$  ergibt sich hieraus:

$$\frac{A}{B} = \pm 1.$$

Das Resultat ist deswegen so einfach, weil wir den Widerstand  $\mathfrak{B}$  an beiden Wänden gleich groß angenommen haben. Das Geschwindigkeitspotential  $\varphi$  nimmt jetzt (bis auf einen konstanten Faktor) die Form an:

$$(8) \quad \varphi = e^{-\delta t} \cdot e^{i\omega t} (e^{-sx} \cdot e^{+ikx} \pm e^{+sx} \cdot e^{-ikx}).$$

Mit diesem Ansatz für  $\varphi$  folgen dann aus den Randbedingungen unmittelbar die beiden Gleichungen:

$$(9a) \quad \pm e^{sl} = \frac{w + c\rho}{w - c\rho} \cos kl - \frac{q}{w - c\rho} \sin kl,$$

$$(9b) \quad \pm e^{sl} = \cos kl + \frac{w + c\rho}{q} \sin kl.$$

Die verschiedenen Vorzeichen entsprechen den beiden Vorzeichen im Ansatz für  $\varphi$  (nicht den Fällen  $w > c\rho$  und

$w < c \varrho$ ). Die Gleichungen bestimmen die beiden Unbekannten  $\omega$  und  $\delta$ . Es ergibt sich sofort

$$(10a) \quad \operatorname{tg} k l = \frac{2 q \cdot c \varrho}{q^2 + (w + c \varrho)(w - c \varrho)},$$

$$(10b) \quad e^{s l} = \sqrt{\frac{q^2 + (w + c \varrho)^2}{q^2 + (w - c \varrho)^2}}.$$

Wir wollen jetzt noch die akustischen Widerstände  $w$  und  $q$  durch den Absorptionskoeffizienten  $a$  und den Phasenwinkel  $\vartheta$  ausdrücken. Unter Benutzung der Gleichungen (7) ergibt sich:

$$\operatorname{tg} k l = \operatorname{tg} \vartheta,$$

$$e^{s l} = \frac{1}{\sqrt{1-a}}.$$

Also wird

$$k_n l = \vartheta + n \pi, \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

$$\omega_n = \frac{c}{l} \cdot (\vartheta + n \pi)$$

und

$$s l = -\frac{1}{2} \ln(1-a),$$

$$\delta = -\frac{1}{2} \cdot \frac{c}{l} \cdot \ln(1-a).$$

Die Dämpfung ist also für alle Eigentöne  $\omega_n$  die gleiche.  
Setzen wir noch

$$-\ln(1-a) = a',$$

so erhalten wir

$$(11) \quad \delta = \frac{c a'}{2 l}.$$

Diese Formel stimmt vollkommen mit derjenigen überein, die sich durch einfache Betrachtungen über die Energieverluste eines Schallstrahles bei den einzelnen Reflexionen ergibt.<sup>1)</sup>

Im vorigen Paragraphen war  $\delta$  gleich  $\frac{c \cdot a' \cdot F}{8 V}$  angesetzt worden.

Auch dieser  $\delta$ -Wert stimmt mit dem der Formel (11) überein, da sich nach der zitierten Arbeit von Jäger für  $l$ , das ist die Weglänge eines Schallstrahles zwischen zwei Reflexionen, der Wert  $4V/F$  ergibt.

1) J. B. Crandall, a. a. O. S. 200.

Für das Geschwindigkeitspotential  $\varphi$  erhalten wir nach Gleichung (8), wenn dort das obere Vorzeichen gilt

$$\varphi_+ = e^{-\delta t} \{ \cos kx \Re \} s x (M \cos \omega t + N \sin \omega t) \\ + \sin kx \Im \} s x (M \sin \omega t - N \cos \omega t) \}$$

und wenn das untere Vorzeichen gilt

$$\varphi_- = e^{-\delta t} \{ \cos kx \Im \} s x (M \cos \omega t + N \sin \omega t) \\ + \sin kx \Re \} s x (M \sin \omega t - N \cos \omega t) \}.$$

Welches der beiden Geschwindigkeitspotentiale,  $\varphi_+$  oder  $\varphi_-$ , einem bestimmten Eigentone zugeordnet ist, wird durch die Gleichung (9a) entschieden. Wenn

$$\frac{w + c \varrho}{w - c \varrho} \cos kl - \frac{q}{w - c \varrho} \sin kl > 0$$

ist, muß das obere Vorzeichen gelten, damit  $e^{\delta t}$  positiv wird. Wenn für einen bestimmten Eigenton die obige Ungleichung erfüllt ist, ist ihm also das Geschwindigkeitspotential  $\varphi_+$  zugeordnet. Wenn dagegen

$$\frac{w + c \varrho}{w - c \varrho} \cos kl - \frac{q}{w - c \varrho} \sin kl < 0$$

ist, muß das untere Vorzeichen gelten. Dann ist dem betreffenden Eigentone das Geschwindigkeitspotential  $\varphi_-$  zugeordnet.

Nehmen wir z. B. an, daß  $q = 0$  und  $w > c \varrho$  ist, so wird nach Gleichung (10a)  $\sin kl = 0$ , und für den Grundton ( $kl = 1 \cdot \pi$ ) wird  $\cos kl = -1$ . Dann geht Gleichung (9a) über in:

$$\pm e^{\delta t} = - \frac{w + c \varrho}{w - c \varrho}.$$

Die Gleichung ist nur mit dem unteren Vorzeichen lösbar. Das dem Grundton zugeordnete Geschwindigkeitspotential ist also für  $w > c \varrho$  gleich  $\varphi_-$ . Für den ersten Oberton ( $kl = 2\pi$ ) ist es  $\varphi_+$  usw.

Im Falle  $w < c \varrho$  ist das dem Grundton zugeordnete Geschwindigkeitspotential  $\varphi_+$  usw.

Man erkennt sofort, daß es keine Stellen im Raume gibt, an denen  $\varphi$  für alle Zeiten verschwindet; es existieren also keine Knotenflächen. Das ist einleuchtend, denn durch eine Knotenfläche hindurch findet kein Energietransport statt.

#### § 4. Dreidimensionales Problem

Wir müssen zunächst wieder den Zusammenhang zwischen dem akustischen Widerstand und dem Absorptionskoeffizienten untersuchen. Wie in § 3 betrachten wir den Wellenvorgang beim Vorhandensein einer einzigen Wand, z. B. der Ebene  $x = 0$ ; an ihr ist der akustische Widerstand  $\mathfrak{B}_1 = w_1 + i q_1$  vorgeschrieben. Die Schwingungen der Luftteilchen sollen aber

jetzt nicht nur senkrecht, sondern auch parallel zur Wand erfolgen. Wir nehmen daher eine Welle an mit dem Geschwindigkeitspotential:

$$\varphi = e^{i\omega t} \cdot \psi_1(x) \cdot \psi_2(y) \cdot \psi_3(z);$$

dabei sei

$$\psi_1 = A_1 \cdot e^{-ik_1 x} + B_1 \cdot e^{+ik_1 x},$$

$$\psi_2 = A_2 \cdot e^{-ik_2 y} + B_2 \cdot e^{+ik_2 y},$$

$$\psi_3 = A_3 \cdot e^{-ik_3 z} + B_3 \cdot e^{+ik_3 z}$$

und

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = k^2.$$

Das Potential  $\varphi$  stellt eine Übereinanderlagerung von acht ebenen Wellenzügen dar, von denen je zwei entgegengesetzte Richtungen haben.

Die Größen  $k_1/k$ ,  $k_2/k$ ,  $k_3/k$  stellen die Richtungskosinus der Wellenzüge dar. Wir wollen sie mit  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  bezeichnen. Die 8 Richtungen ergeben sich durch die Kombinationen

$$+\alpha_1, +\alpha_2, +\alpha_3; +\alpha_1, +\alpha_2, -\alpha_3; +\alpha_1, -\alpha_2, +\alpha_3; -\alpha_1, +\alpha_2, +\alpha_3; \\ +\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3; -\alpha_1, +\alpha_2, -\alpha_3; -\alpha_1, -\alpha_2, +\alpha_3; -\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3.$$

Lassen wir in einem quaderförmigen Raume einen Schallstrahl mit der Anfangsrichtung  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  loslaufen, so kann er auf seinem durch die Reflexionen vielfach gebrochenen Wege immer nur eine der angegebenen 8 Richtungen einnehmen.

Um den gewünschten Zusammenhang zwischen akustischem Widerstand und Absorptionskoeffizienten an der Wand  $x = 0$  zu erhalten, zerlegen wir die gesamte Welle in die zur Wand hinlaufenden Wellen (vier ebene Wellen)

$$\varphi_E = A_1 \cdot e^{-ik_1 x} \cdot \psi_2 \cdot \psi_3 \cdot e^{i\omega t}$$

und die von der Wand reflektierten Wellen (ebenfalls vier Wellen)

$$\varphi_R = B_1 \cdot e^{+ik_1 x} \cdot \psi_2 \cdot \psi_3 \cdot e^{i\omega t}.$$

Bezeichnen wir den Absorptionskoeffizienten  $\left(1 - \left|\frac{B_1}{A_1}\right|^2\right)$  mit  $a_1$  und den Phasenwinkel zwischen beiden Wellen mit  $\vartheta_1$ , so erhalten wir in Analogie zu den Gleichungen (6)

$$(12a) \quad \frac{w_1}{c\varrho} = \frac{a_1}{2 - 2\cos\vartheta_1 \cdot \sqrt{1-a_1} - a_1} \cdot \frac{k}{k_1},$$

$$(12b) \quad \frac{q_1}{c\varrho} = \frac{2\sin\vartheta_1 \cdot \sqrt{1-a_1}}{2 - 2\cos\vartheta_1 \cdot \sqrt{1-a_1} - a_1} \cdot \frac{k}{k_1}$$

und die Umkehrgleichungen ( $k_1/k$  ist gleich  $\alpha_1$  gesetzt):

$$(13a) \quad 1 - \alpha_1 = \frac{(\alpha_1 q_1)^2 + (\alpha_1 w_1 - c q)^2}{(\alpha_1 q_1)^2 + (\alpha_1 w_1 + c q)^2}$$

$$(13b) \quad \operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{2 \alpha_1 q_1 \cdot c q}{(\alpha_1 q_1)^2 + (\alpha_1 w_1 + c q) \cdot (\alpha_1 w_1 - c q)}$$

Es muß betont werden, daß der hier eingeführte Absorptionskoeffizient  $\alpha_1$  nicht mehr nur eine Eigenschaft der Wand und der Verhältnisse hinter der Wand ist, sondern auch von den Richtungen der auftreffenden Wellen abhängt. Das gleiche gilt auch von den Widerständen  $w_1$  und  $q_1$ . Die Art der Abhängigkeit wird erst durch die Verhältnisse hinter der Wand bestimmt. Die Gleichung (13a) kann als (Fresnelsche) Intensitätsgleichung bei schief auffallendem Schallstrahl aufgefaßt werden. Der Bruchteil der Energie, der an der Grenze zweier Medien durchgelassen wird, hängt von dem Einfallswinkel ab. Nur in den Grenzfällen  $a = 0$ ,  $a = 1$  spielt der Einfallswinkel keine Rolle. Den Berechnungen von Sabine und Jäger liegt die gleiche Definition des Absorptionskoeffizienten zugrunde; er ist auch dort das bei dem jeweiligen Einfallswinkel herrschende Verhältnis der nicht reflektierten zur einfallenden Energie.

Nachdem wir den Zusammenhang zwischen akustischem Widerstand und Absorptionskoeffizienten für den dreidimensionalen Fall erhalten haben, können wir den Abklingungsvorgang in einem Quader untersuchen. Die Wände mögen an den Stellen liegen:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{2} l_1; & x &= +\frac{1}{2} l_1 \\ y &= -\frac{1}{2} l_2; & y &= +\frac{1}{2} l_2 \\ z &= -\frac{1}{2} l_3; & z &= +\frac{1}{2} l_3. \end{aligned}$$

Es existieren dann sechs Randbedingungen von der Form

$$\varrho \dot{\varphi} + \Re \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0,$$

wobei  $\nu$  die äußere Wandnormale ist.

Für  $\varphi$  machen wir den Bernoullischen Ansatz

$$\varphi = e^{-\delta t} \cdot e^{i\omega t} \cdot \psi_1(x) \cdot \psi_2(y) \cdot \psi_3(z)$$

und setzen, da wir den akustischen Widerstand gegenüberliegender Wände als gleich annehmen, in Analogie zu den Rechnungen des vorigen Paragraphen:

$$\psi_1 = e^{-s_1 x} \cdot e^{+i k_1 x} \pm e^{+s_1 x} \cdot e^{-i k_1 x},$$

$$\psi_2 = e^{-s_2 y} \cdot e^{+i k_2 y} \pm e^{+s_2 y} \cdot e^{-i k_2 y},$$

$$\psi_3 = e^{-s_3 z} \cdot e^{+i k_3 z} \pm e^{+s_3 z} \cdot e^{-i k_3 z}.$$

Durch Einsetzen in die Wellengleichung ergibt sich dann

$$(14a) \quad k^2 - s^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2).$$

$$(14b) \quad h s = k_1 s_1 + k_2 s_2 + k_3 s_3.$$

Aus den Randbedingungen folgen 6 Gleichungen:

$$(15) \quad \begin{cases} \pm e^{s_1 l_1} = \frac{w_1 \cdot (k_1 k + s_1 s) + q_1 (k_1 s - s_1 k) + c \varrho (k^2 + s^2)}{w_1 \cdot (k_1 k + s_1 s) + q_1 (k_1 s - s_1 k) - c \varrho (k^2 + s^2)} \cdot \cos k_1 l_1 \\ \quad + \frac{w_1 \cdot (k_1 s - s_1 k) - q_1 (k_1 k + s_1 s)}{w_1 \cdot (k_1 k + s_1 s) + q_1 (k_1 s - s_1 k) - c \varrho (k^2 + s^2)} \cdot \sin k_1 l_1 \\ \pm e^{s_1 l_1} = \cos k_1 l_1 + \frac{w_1 \cdot (k_1 k + s_1 s) + q_1 (k_1 s - s_1 k) + c \varrho (k^2 + s^2)}{w_1 \cdot (s_1 k - k_1 s) + q_1 \cdot (k_1 k + s_1 s)} \cdot \sin k_1 l_1 \\ \pm e^{s_2 l_2} = \dots \\ \pm e^{s_2 l_2} = \dots \\ \pm e^{s_3 l_3} = \dots \end{cases}$$

Die acht Gleichungen (14) und (15) bestimmen die acht Unbekannten  $k$ ,  $s$ ,  $k_1$ ,  $s_1$ ,  $k_2$ ,  $s_2$ ,  $k_3$ ,  $s_3$ . Allgemein scheint das Gleichungssystem nicht lösbar zu sein, zumal die  $w_i$ ,  $q_i$  als unbekannte (erst experimentell zu bestimmende) Funktionen der  $k_i/h$  aufzufassen sind. Wir wollen daher eine vereinfachende Annahme machen; ihre Bedeutung wird erst weiter unten klar gestellt werden. Es soll sein:

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{k_1}{k} = \frac{s_1}{s} = \alpha_1 \\ \frac{k_2}{k} = \frac{s_2}{s} = \alpha_2 \\ \frac{k_3}{k} = \frac{s_3}{s} = \alpha_3. \end{cases}$$

Dann gehen die Gleichungen (15) über in

$$\begin{aligned} \pm e^{s_1 l_1} &= \frac{\alpha_1 w_1 + c \varrho}{\alpha_1 w_1 - c \varrho} \cdot \cos k_1 l_1 - \frac{\alpha_1 q_1}{\alpha_1 w_1 - c \varrho} \cdot \sin k_1 l_1 \\ \pm e^{s_1 l_1} &= \cos k_1 l_1 + \frac{\alpha_1 w_1 + c \varrho}{\alpha_1 q_1} \cdot \sin k_1 l_1 \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von den Gleichungen (9) abgesehen von den Indizes nur dadurch, daß  $w$  durch  $\alpha_i w_i$  und  $q$  durch  $\alpha_i q_i$  ersetzt ist. Infolgedessen erhalten wir in Analogie zu den Gleichungen (10):

$$\operatorname{tg} k_1 l_1 = \frac{2 \alpha_1 q_1 \cdot c \varrho}{(\alpha_1 q_1)^2 + (\alpha_1 w_1 + c \varrho)(\alpha_1 w_1 - c \varrho)}$$

$$\operatorname{tg} k_2 l_2 = \dots$$

$$\operatorname{tg} k_3 l_3 = \dots$$

$$e^{s_1 l_1} = \sqrt{\frac{(\alpha_1 q_1)^2 + (\alpha_1 w_1 + c \varrho)^2}{(\alpha_1 q_1)^2 + (\alpha_1 w_1 - c \varrho)^2}}$$

$$e^{s_2 l_2} = \dots$$

$$e^{s_3 l_3} = \dots$$

Unter Benutzung von (13) wird

$$\operatorname{tg} k_1 l_1 = \operatorname{tg} \vartheta_1,$$

$$\operatorname{tg} k_2 l_2 = \operatorname{tg} \vartheta_2,$$

$$\operatorname{tg} k_3 l_3 = \operatorname{tg} \vartheta_3,$$

$$e^{s_1 l_1} = \frac{1}{\sqrt{1 - a_1}},$$

$$e^{s_2 l_2} = \frac{1}{\sqrt{1 - a_2}},$$

$$e^{s_3 l_3} = \frac{1}{\sqrt{1 - a_3}},$$

wobei  $a_1, a_2, a_3$  die Absorptionskoeffizienten und  $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$  die Phasenwinkel der 3 Wändepaare bedeuten. Daraus folgt ohne weiteres

$$k_1 l_1 = \vartheta_1 + n_1 \pi, \quad n_1 = 0, 1, 2 \dots$$

$$k_2 l_2 = \vartheta_2 + n_2 \pi, \quad n_2 = 0, 1, 2 \dots$$

$$k_3 l_3 = \vartheta_3 + n_3 \pi, \quad n_3 = 0, 1, 2 \dots$$

und

$$(17) \quad \begin{cases} s_1 l_1 = -\frac{1}{2} \ln(1 - a_1) = \frac{1}{2} a_1' \\ s_2 l_2 = -\frac{1}{2} \ln(1 - a_2) = \frac{1}{2} a_2' \\ s_3 l_3 = -\frac{1}{2} \ln(1 - a_3) = \frac{1}{2} a_3' \end{cases}$$

Wir müssen jetzt noch die neu eingeführten Größen  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  bestimmen und die Bedeutung der vereinfachenden Annahme (16) aufzeigen. Die Gleichungen (14) liefern die Beziehung

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1,$$

außerdem folgt aus unserem Ansatz (16):

$$h_1 : h_2 : h_3 = s_1 : s_2 : s_3 = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3,$$

also

$$\frac{\vartheta_1 + n_1 \pi}{l_1} : \frac{\vartheta_2 + n_2 \pi}{l_2} : \frac{\vartheta_3 + n_3 \pi}{l_3} = \frac{a_1'}{l_1} : \frac{a_2'}{l_2} : \frac{a_3'}{l_3} = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3.$$

Am einfachsten befriedigen wir dieses Gleichungssystem durch die Annahmen:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$l_1 = l_2 = l_3 = l,$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = a,$$

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3 = \vartheta,$$

$$n_1 = n_2 = n_3.$$

Die Annahmen bedeuten, daß der betrachtete Raum Würfelgestalt besitzt, daß seine Wändepaare gleiche Absorptionskoeffizienten und gleiche Phasenwinkel haben, und daß es sich um einen Eigentön handelt, für den die 3 Ordnungszahlen  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  gleich sind.

Um die physikalische Bedeutung der letzten Bedingung zu erkennen, denken wir uns einen ungedämpften Raum mit „offener“ Begrenzung ( $w = 0$ ;  $q = 0$ ) und betrachten die Verhältnisse in diesem Raume. Hier existiert eine Anzahl von Druckknotenflächen; es sind äquidistante Ebenen, die parallel zu den Wänden verlaufen. Die Wände sind in dem angenommenen Spezialfall  $q = 0$  ebenfalls Druckknotenflächen. Die Zahl der inneren Druckknotenflächen, die parallel zu den Wänden  $x = \mp \frac{1}{2}l$  liegen, ist gleich  $n_1 - 1$ . Entsprechend ist  $n_2 - 1$  gleich der Zahl der inneren Druckknotenflächen  $y = \text{const.}$ ,  $n_3 - 1$  gleich der Zahl der inneren Druckknotenflächen  $z = \text{const.}$  Durch die 3 Gruppen von Druckknotenflächen wird der gesamte würfelförmige Raum in kleine, untereinander gleich große Quader aufgeteilt, und zwar liegen in der  $x$ -Richtung  $n_1$  Schichten von Quadern, in der  $y$ -Richtung  $n_2$ , in der  $z$ -Richtung  $n_3$  Schichten. Die Kantenlänge eines Quaders ist also in der  $x$ -Richtung  $\frac{l}{n_1}$ , in der  $y$ -Richtung  $\frac{l}{n_2}$ , in der  $z$ -Richtung  $\frac{l}{n_3}$ . Wählen wir jetzt  $n_1 = n_2 = n_3$ , so nehmen die Quader Würfelgestalt an. Die durch die angegebene Bedingung charakterisierten Eigentöne sind also durch eine besonders regelmäßige Amplitudenverteilung im Raume ausgezeichnet. Wir möchten annehmen, daß auch für gedämpfte Räume von Würfelgestalt, in denen ja Knotenflächen nicht mehr existieren, die Bedingung  $n_1 = n_2 = n_3$  eine besonders gleichmäßige Schallverteilung im Raume garantiert. Ist in der Anfangskonstellation ( $t = 0$ ) der Raum gleich-



mäßig von Schall durchflutet, so werden die Eigentöne mit gleichmäßiger Amplitudenverteilung am stärksten hervortreten; ihre Nachhalldauer wird infolgedessen für die Nachhalldauer des Gesamtklanges ausschlaggebend sein. Die exakte Bestimmung ihrer Stärke müßte durch eine Fourieranalyse des Anfangszustandes erfolgen.

Wir wollen die Verhältnisse noch von einer anderen Seite betrachten. Das Geschwindigkeitspotential  $\varphi = e^{-\delta t} \cdot e^{i\omega t} \cdot \psi_1 \psi_2 \psi_3$  kann, da  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  aus je zwei Summanden bestehen, durch Ausmultiplizieren in acht Teile zerlegt werden. Einer davon heißt

$$e^{-\delta t} \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{-(s_1 x + s_2 y + s_3 z)} \cdot e^{i(k_1 x + k_2 y + k_3 z)},$$

Infolge unserer Annahme (16) wird daraus

$$e^{-\delta t} \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{-s \cdot (a_1 x + a_2 y + a_3 z)} \cdot e^{i k \cdot (a_1 x + a_2 y + a_3 z)}.$$

Das ist das Potential einer zeitlich und räumlich gedämpften ebenen Welle; die Richtung der räumlichen Dämpfung ist der Fortschrittingsrichtung entgegengesetzt. Die Größen  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  sind die Richtungskosinus des durch die Welle dargestellten Schallstrahles. Die Bedingung  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$  bedeutet, daß der Schallstrahl mit den Koordinatenachsen die gleichen Winkel einschließt. In unserem würfelförmigen Raume hat also der Schallstrahl die Richtung einer Diagonale. Die acht auftretenden Schallstrahlen haben die Richtungen der vier Würfel diagonalen.

Nach Gleichung (14) muß sein

$$3\alpha_1^2 = 1,$$

also

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Aus Gleichung (17) folgt dann

$$\delta = s c = \frac{s_1}{\alpha_1} \cdot c = \frac{c a' \sqrt{3}}{2l}.$$

Nennen wir das Volumen des Würfels  $V$ , seine Oberfläche  $F$ , so wird

$$(18a) \quad \delta = \frac{c a' F}{4 \sqrt{3} \cdot V}.$$

In analoger Weise erhält man für die Dämpfung in einem zylindrischen Raum, dessen Durchmesser gleich seiner Höhe ist,

$$(18b) \quad \delta = \frac{c a' F}{6 \sqrt{2} \cdot V}$$

und in einer Kugel

$$(18c) \quad \delta = \frac{c a' F}{12 V}.$$

Bei der Ableitung dieser Formeln muß allerdings noch die Annahme gemacht werden, daß die Radien der Räume groß gegen die Wellenlänge sind ( $kR \gg 1$ ), so daß die auftretenden Besselschen Funktionen in den Randbedingungen durch trigonometrische Funktionen ersetzt werden können. In speziellen Fällen gelten die Formeln (18b) und (18c) auch für den Würfel; (18b) dann, wenn die Schwingungen parallel zu einem Wändepaar, z. B.  $z = \mp \frac{1}{2}l$ , erfolgen und wenn  $n_1 = n_2$  ist; die Formel (18c), wenn die Schwingungen senkrecht zu einem Wändepaar erfolgen.

Nach den Formeln (2) und (2') ist der Dämpfungswert, den Jäger durch elementare Betrachtungen für einen geschlossenen Raum abgeleitet hat,

$$\delta = \frac{caF}{8V}.$$

Setzen wir statt  $a$  noch den richtigeren Wert  $a'$  in diese Formel ein, so sieht man, daß der Jägersche Wert gerade zwischen den von uns abgeleiteten Werten für einen Würfel und für einen Zylinder liegt. Der gleiche Wert wie bei Jäger findet sich auch bei W. Sabine<sup>1)</sup>. In einer früheren Arbeit hatte Sabine auf Grund etwas anderer experimenteller Ergebnisse für einen kubischen Raum implizite einen  $\delta$ -Wert angegeben<sup>2)</sup>, der sich dem Wert der Formel (18a) stark nähert.

### § 5. Über die günstigste Nachhalldauer

Mit der Möglichkeit, die Nachhalldauer  $T$  in einem (geplanten oder bereits ausgeführten) geschlossenen Raume zu berechnen, ist der raumakustischen Forschung ein wertvolles Hilfsmittel an die Hand gegeben. Ist  $T$  in einem fertigen Raume zu klein oder zu groß, so kann in einfacher Weise rechnerisch festgestellt werden, wie die Dämpfung geändert werden muß, um  $T$  um einen bestimmten Betrag herauf- bzw. herabzusetzen. Leider steht noch nicht fest, welches der günstigste Wert von  $T$  ist. Deshalb ist es noch nicht möglich, für einen geplanten Raum von bestimmter Größe von vornherein Dämpfung und Schalleistung und damit auch die Nach-

1) W. C. Sabine, a. a. O. S. 50.

2) W. C. Sabine, a. a. O. S. 40.

halldauer so festzulegen, daß mit Sicherheit die günstigste Hörsamkeit erreicht wird. Es kann sich hierbei im allgemeinen nur um Kompromißlösungen handeln, da dem Raumakustiker vielfach — wenn nicht in der Regel — Aufgaben gestellt werden und oft gestellt werden müssen, deren wirklich einwandfreie Lösung unmöglich ist. So ist schon die alltägliche Forderung, daß in einem Musiksaal sowohl ein zartes piano wie ein fortissimo, beides in vollkommener Schönheit, herauskommen sollen, nicht zu erfüllen. Klingt das piano einwandfrei, so läßt sich beim fortissimo ein etwas lärmender, verwaschener Eindruck nicht vermeiden, obwohl durch gute Spieltechnik manches ausgeglichen werden kann.

Es ist mehrfach der Versuch gemacht worden, eine „günstigste Nachhalldauer“  $T_{\text{opt}}^1)$  als Funktion des Raumvolumens  $V$  auszurechnen. Lifschitz<sup>2)</sup> hat eine entsprechende Formel für große Räume mit Hilfe eines in kleinen Räumen empirisch festgestellten  $T_{\text{opt}}$ -Wertes hergeleitet. Dabei wird angenommen, daß  $T_0 \lg E_0$  ( $T_0$  die „wirkliche“ Nachhalldauer, innerhalb deren die wirklich vorhandene Intensität auf den Schwellenwert herabsinkt) die für das Hören maßgebende Größe sei und deshalb für alle Räume konstant sein müsse; für kleine Räume ist sie empirisch bestimmt. Ferner wird vorausgesetzt, daß die Leistung der Schallquelle für alle Räume die gleiche ist. Schon hieraus geht hervor, daß die Formel von Lifschitz, so wertvoll sie an sich ist, keine allgemeine oder endgültige Lösung des Problems darstellen kann. Petzold<sup>3)</sup> führt zwei Beispiele an, die „der Allgemeingültigkeit der Formel zu widersprechen scheinen“.

Uns scheint hierüber hinaus die übliche Annahme, daß  $T_{\text{opt}}$  grundsätzlich mit  $V$  wachsen müsse, nicht richtig zu sein. Zur Begründung dieser Ansicht wollen wir zunächst die Fragestellung klären, die je nach der zu lösenden raumakustischen Aufgabe verschieden ist. Ein allgemeingültiges Rezept zur Erzielung guter Hörsamkeit gibt es nicht. Eine besonders

1)  $T_{\text{opt}}$  ist im folgenden immer der günstigste Wert der Sabine-schen Nachhalldauer, wie sie im § 1 definiert worden ist.

2) S. Lifschitz, Phys. Rev. 25 S. 392. 1925; 27 S. 618. 1926. Eine russische Arbeit von Lifschitz war uns leider nicht zugänglich.

3) E. Petzold, Elementare Raumakustik, Berlin 1927.

einfach erscheinende Aufgabe ist die, einen vorgegebenen Raum, etwa ein Musikzimmer, bei vorgegebener mittlerer Schalleistung, etwa für ein mechanisches Klavier, raumakustisch gut einzurichten. Es ist dann nur eine einzige Variable vorhanden, die Dämpfung. Diese könnte nicht nur empirisch, sondern auch theoretisch nach den unter Berücksichtigung von (4) berichtigten Formeln (1) und (3) bestimmt werden, wenn noch festgelegt ist, welche mittlere Schallintensität und welche Nachhalldauer für das Hören am angenehmsten ist. Natürlich wird sich hierbei in der Regel herausstellen, daß es nicht möglich ist,  $a_m$  so zu wählen, daß sowohl  $E_0$  als auch  $T$  ihre günstigsten Werte erhalten. Es müßte denn sein, daß die Dimensionen des Raumes für die vorgegebene Schalleistung zufällig richtig getroffen sind. Steht also eine zweite Variable, etwa die Schalleistung, nicht zur Verfügung, so kann für  $a_m$  nur ein Kompromißwert eingesetzt werden, wobei zu beachten ist, daß sich die Empfindungsstärke mit der Reizstärke nur langsam ändert. Deshalb bedeutet es praktisch eine Erleichterung der raumakustischen Aufgabe, wenn die Leistung der Schallquelle (etwa Singstimme) variiert werden kann. Was durch die Ausgestaltung des Raumes nicht zu erreichen ist, wird dann durch Anpassung der Schallintensität ausgeglichen. Ist auch der Raum als solcher (Volumen und Begrenzungsfläche) nicht vorgegeben, so tritt noch eine dritte Variationsmöglichkeit hinzu.

Das grundsätzlich Richtige wäre nun, Schalleistung, Dimensionen des Raumes und Dämpfung stets so zu wählen, daß die als günstigst erkannten  $E_0$ - und  $T$ -Werte erreicht werden. Es ist nicht einzusehen, warum diese Werte in verschiedenen großen Räumen verschieden sein sollten. Es müßte denn sein, daß — noch unbekannte — psychische Einflüsse für einen größeren Raum auch größere Nachhalldauer erforderlich machen. Die bisherigen praktischen Erfahrungen können noch nicht als beweisend in dem einen oder anderen Sinne angesehen werden, obwohl in einigen größeren Sälen von anerkannt guter Hörsamkeit eine größere Nachhalldauer festgestellt worden ist als in kleineren Sälen von ebenfalls anerkannt guter Hörsamkeit. Eine bessere Anpassung der Schalleistung und Änderung der Nachhalldauer könnte aber sehr wohl die Hörsamkeit noch weiter verbessern, denn

„anerkannt gut“ ist eine recht unsichere Angabe. Auch stehen einige der an sich schon nicht zahlreichen Beispiele aus der Praxis, die immer wieder angeführt werden, in direktem Widerspruch zu der Forderung einer Zunahme von  $T_{\text{opt}}$  mit wachsendem Volumen. Nach einer Zusammenstellung, die Watson<sup>1)</sup> für (vollbesetzte) Räume guter Hörsamkeit gibt, haben z. B. der Gewandhaussaal in Leipzig und die New Music Hall in Boston bei einem Volumen von etwa 12000 bzw. 19000 m<sup>3</sup> die gleiche Nachhalldauer von etwa 2,3 Sek. Ferner hat die Orchester Hall in Detroit bei einem Volumen von etwa 11000 m<sup>3</sup> mit etwa 1,6 Sek. eine bedeutend kleinere Nachhalldauer als der fast ebenso große Gewandhaussaal, während die Kilbourn Hall mit 5600 m<sup>3</sup> Volumen ebenfalls eine Nachhalldauer von etwa 1,6 Sek. aufweist. Endlich gibt Petzold für den Trocadéro-Saal in Paris mit 63000 m<sup>3</sup> Volumen die Nachhalldauer zu 1,45 Sek. an. Genauere Untersuchungen sind bisher nur für kleinere Räume bekannt geworden. Sabine, Lifschitz und Watson haben in Räumen von etwa 70 bis 250 m<sup>3</sup> die Dämpfung so lange geändert, bis Musiksachverständige erklärten, daß die beste Hörsamkeit erreicht sei. Die zugehörige Nachhalldauer zeigte keine Abhängigkeit vom Volumen und betrug etwa 1 Sek. Ob aber die Schalleistung den Räumen wirklich angepaßt war, steht nicht fest.

Man wird zugeben müssen, daß den angeführten Zahlen auch unabhängig von den erwähnten Unsicherheiten und Fehlern, jede Beweiskraft fehlt. Für den Fall idealer Hörsamkeit können also sehr wohl  $E_0$  und  $T$  vom Raumvolumen unabhängige Konstante sein, die allerdings noch genauer zu bestimmen sind. Für die in den meisten Fällen der Praxis notwendigen Kompromißlösungen wird sich aber eine Variation von  $E_0$  und  $T$  nicht vermeiden lassen. Da für die Beurteilung der Hörsamkeit das subjektive Empfinden maßgebend ist, ist es schwer, einigermaßen sichere empirische Unterlagen zu gewinnen. Wenn wir trotzdem in dem folgenden Paragraphen einige Formeln angeben, so sind wir uns also klar darüber, daß die eingesetzten Zahlenwerte unbedingt der Verbesserung bedürfen.

---

1) F. R. Watson, Journ. of the Franklin Inst. 198. S. 73. 1924.

§ 6. Formelmäßige Darstellung der  $T_{\text{opt}}$ -Werte<sup>1)</sup>

Die im vorigen Paragraphen erwähnte Formel von Lifschitz lautet<sup>2)</sup>:

$$(19) \quad \lg V = (6 - \lg 1,06 + \lg 350) + \lg T_{\text{opt}} - \frac{6 \sqrt[3]{1,06}}{\sqrt{T_{\text{opt}}}}.$$

Sie gilt für Räume, die größer als 350 m<sup>3</sup> sind, und unter der Voraussetzung, daß die Schalleistung in allen Räumen die gleiche ist. Sie ergibt sich durch einfache Rechnung aus der Annahme, daß  $T_0 \lg E_0$  für alle Räume konstant ist und daß für Räume von 350 m<sup>3</sup> an abwärts  $T_{\text{opt}} = 1,06$  und  $E_0 = 10^6$  Schwelleneinheiten ist. Es sei daran erinnert, daß  $T_0$  nicht die Sabinesche, sondern die „wirkliche“ Nachhalldauer bedeutet. Es ist nach Definition  $T_0 = \frac{T}{6} \lg E_0$ .

Kurve 1 in Fig. 1 stellt  $T_{\text{opt}}$  als Funktion von  $\sqrt[3]{V}$  nach Formel (19) dar. Die  $T_{\text{opt}}$ -Werte sind in Sekunden, die  $\sqrt[3]{V}$ -Werte in Metern aufgetragen.

Für größere Räume müssen aber im allgemeinen größere Schalleistungen vorgesehen werden als für kleinere; beispielsweise muß ein Orchester stärker besetzt werden. Wir müssen also die Annahme, daß  $L$  unabhängig von  $V$  ist, fallen lassen und wollen  $L \sim \sqrt[3]{V}$  ansetzen, wobei wir uns bewußt sind, daß genauere Messungen zu einem zahlenmäßig anderen Ansatz führen werden. Bezeichnen wir die einzelnen Größen für große Räume mit dem Index 2 und für kleine Räume mit dem Index 1, so wird nach den in § 1 angegebenen Formeln:

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{a'_{m2} F_2 E_{02}}{a'_{m1} F_1 E_{01}}.$$

Setzen wir diese Größe also gleich  $\frac{\sqrt[3]{V_2}}{\sqrt[3]{V_1}}$  und nehmen wir an, daß in den kleineren Räumen (bis 350 m<sup>3</sup>) die anfängliche

1) Auf die wertvollen, aber im wesentlichen empirischen Daten Watsons (F. R. Watson, *Acoustics of buildings*, New York u. London 1923) gehen wir an dieser Stelle nicht ein.

2) Lifschitz gibt noch eine andere Formel, die sich aber nicht wesentlich von der hier angegebenen unterscheidet.

Schalldichte  $E_{01}$  im Mittel gleich  $10^6$  Schwelleneinheiten ist, so folgt unter Benutzung von Formel (5):

$$\lg E_{02} = 6 + \lg \left( \frac{T_2 \sqrt[3]{V_1^2}}{T_1 \sqrt[3]{V_2^2}} \right).$$

Knüpfen wir nun an die Annahme von Lifschitz an, daß  $T_{02} \lg E_{02} = T_{01} \lg E_{01}$  sein soll und daß der optimale Wert

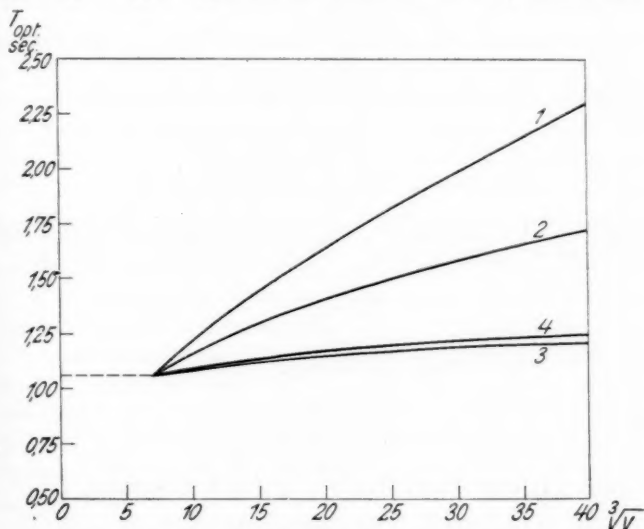


Fig. 1

von  $T_{01} \lg E_{01} = 1,06 \cdot 6$  ist, so folgt für Räume  $> 350 \text{ m}^3$  eine gegenüber Lifschitz etwas abgeänderte Formel:

$$(20) \quad \frac{2}{3} \lg V = \left( 6 - \lg 1,06 + \frac{2}{3} \lg 350 \right) + \lg T_{\text{opt}} - \frac{6\sqrt[3]{1,06}}{\sqrt[3]{T_{\text{opt}}}}.$$

Die graphische Darstellung der nach dieser Formel berechneten  $T_{\text{opt}}$ -Werte als Funktionen von  $\sqrt[3]{V}$  ist in Kurve 2 der Fig. 1 gegeben.

Wir müssen aber weiterhin bezweifeln, daß  $T_0 \lg E_0$  in verschieden großen Räumen wirklich konstant sein müsse, um die beste Hörsamkeit zu gewährleisten. Es erscheint uns un-

wahrscheinlich, daß die wirkliche Nachhalldauer mit abnehmender Reiz- und Empfindungsstärke wachsen muß. Das Richtige dürfte — wie schon erwähnt — sein, Reizstärke und Nachhalldauer konstant zu halten. Da sich aber in vielen Fällen der Praxis eine Verminderung der Reizstärke mit wachsendem  $V$  nicht wird vermeiden lassen, so bleibt experimentell zu prüfen, wie weit  $E_0$  im Mittel von einem Idealwert herabsinken darf, ohne daß die Hörsamkeit entscheidend verschlechtert wird. Wir setzen probeweise  $E_0 \sim \frac{1}{\sqrt[3]{V}}$  und fordern

weiterhin, daß die wirkliche Nachhalldauer konstant sei:

$$\begin{aligned} T_{02} &= T_{01} \\ \text{oder} \quad \frac{T_2}{6} \lg E_{02} &= \frac{T_1}{6} \lg E_{01}. \end{aligned}$$

Setzen wir für Räume bis 350 m<sup>3</sup> wiederum  $T_{\text{opt}} = 1,06^1$ ) und  $E_0 = 10^6$  Schwelleneinheiten, so folgt für größere Räume:

$$T_{\text{opt}} = \frac{6 \cdot 1,06}{\lg E_{02}}.$$

Da  $\frac{E_{02}}{E_{01}} = \frac{\sqrt[3]{350}}{\sqrt[3]{V}}$  sein soll, so ergibt sich:

$$(21) \quad T_{\text{opt}} = \frac{6 \cdot 1,06}{6 + \lg \sqrt[3]{350} - \lg \sqrt[3]{V}}.$$

Formel (21) wird durch Kurve 3 in Fig. 1 dargestellt.

Soll der Ausdruck für die günstigste Nachhalldauer so formuliert werden, daß er auch für kleinere Volumina Gültigkeit behält, so könnte man für  $E_0$  etwa folgende Bedingung vorschreiben:

$$E_0 = 10^6 \cdot e^{-aV},$$

wobei also die anfängliche mittlere Schalldichte in kleinen Räumen wieder zu 10<sup>6</sup> Schwelleneinheiten angenommen ist. Mit der Forderung der Konstanz der wirklichen Nachhalldauer  $T_0$  ist identisch die Bedingung:  $T \lg E_0 = \text{const.}$  Setzen wir für beste Hörsamkeit für die Konstante wieder den Wert 6·1,06 ein, so wird

$$T_{\text{opt}} = \frac{1,06}{1 - \frac{a}{13,8} V}.$$

1) Wir schleppen die Dezimalen nur deshalb mit, um den Anschluß an die früheren experimentellen Arbeiten zu erleichtern.



Durch die Festsetzung von  $\alpha$  wird nun formuliert, wie weit  $E_0$  bzw. die Empfindungsstärke  $\lg E_0$  für ein vorgegebenes oberes Grenzvolumen von dem für  $V \sim 0$  vorgegebenen Wert herabsinken darf. Nehmen wir, um auch hier wieder schätzungsweise Zahlen zu nennen, an, daß  $\lg E$  für  $V = 50000 \text{ m}^3$  um 30 Proz. kleiner sein darf als für sehr kleine Räume, so folgt durch ähnliche Rechnungen wie bisher für Räume bis zu  $50000 \text{ m}^3$ :

$$(22) \quad T_{\text{opt}} = \frac{1,06}{1 - 3 \cdot \frac{V}{500000}}.$$

Wenn man bedenkt, daß im praktischen Falle in der Regel gewisse Nebengeräusche und sonstige Störungen vorhanden sind, die die Reizschwelle heraufsetzen, so bietet sich noch ein anderer Weg, die Forderung für beste Hörsamkeit zu formulieren. Es soll nicht die Sabinesche Nachhalldauer  $T$ , auch nicht die wirkliche Nachhalldauer  $T_0$ , sondern eine „praktische“ Nachhalldauer  $T_{00}$  konstant sein, deren Reizendwert bei einem mehrfachen, beispielsweise dem zehnfachen des in ganz ruhigen Räumen bestimmten Schwellenwertes liegt. Wird in einem rechtwinkligen Koordinatensystem in der Abszissenrichtung die Zeit  $t$  und in der Ordinatenrichtung  $\ln E$  aufgetragen, so sind die Abklingkurven gerade Linien, die die Ordinatenachse in dem Punkte  $\ln E_0$  und die Abszissenachse in dem zu diesem  $E_0$  gehörenden  $T_0$ -Wert schneiden. Die Koordinaten des Reizendwertes sind dann  $\ln E_{00}$  („praktische“ Empfindungsschwelle) und  $T_{00}$ . Es folgt:

$$\frac{T_{00}}{T_0} + \frac{\ln E_{00}}{\ln E_0} = 1.$$

Setzen wir, entsprechend einem optimalen  $T$ -Wert von 1,06, für  $T_{00 \text{ opt}}$  den Betrag von 0,88 Sek. ein, für  $E_{00}$  den Betrag von 10 Schwelleneinheiten und schreiben wir wieder vor, daß sich  $E_0 \sim \frac{1}{\sqrt[3]{V}}$  ändern soll, so folgt unter Berücksichtigung

der Beziehung  $T_0 = \frac{T}{6} \lg E_0$  für Räume  $> 350 \text{ m}^3$  ganz ähnlich wie unter (21):

$$(23) \quad T_{\text{opt}} = \frac{6 \cdot 0,88}{5 + \lg \sqrt[3]{350} - \lg \sqrt[3]{V}}.$$

Kurve 4 in Fig. 1 stellt diese Formel graphisch dar.

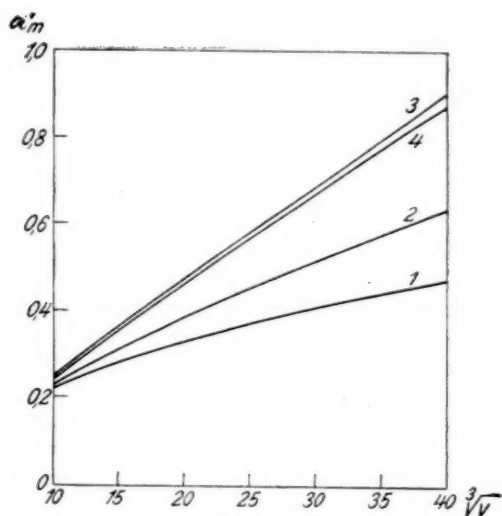


Fig. 2

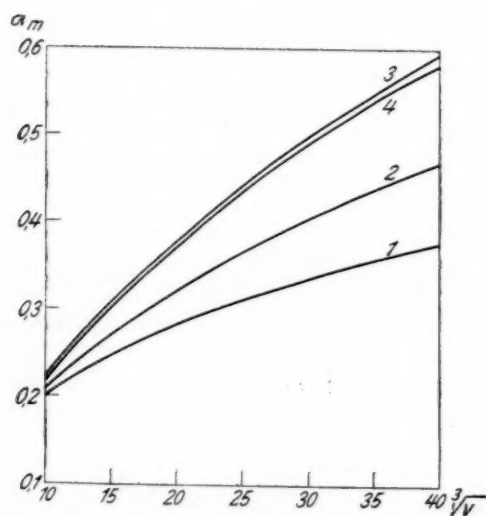


Fig. 3

In Fig. 2 sind die zu den  $T_{\text{opt}}$ -Werten der Fig. 1 gehörenden  $a'_m$ -Werte als Funktionen von  $\sqrt[3]{V}$  dargestellt. Dabei ist zur Vereinfachung der Rechnung angenommen, daß es sich um kubische Räume handelt. Fig. 3 gibt die entsprechenden, nach Formel (5) berechneten  $a_m$ -Werte.

Weitere Einzelheiten, wie den genaueren Verlauf der  $E_0$ - und  $L$ -Werte, zu besprechen, scheint uns im Rahmen der vorstehenden Diskussion entbehrlich zu sein. Die Kurven der Figg. 1 und 3 dürften aber zeigen, daß unsere Annahmen über die günstigste Nachhalldauer einigermaßen zutreffend und vielleicht geeignet sind, als Leitfaden für die unbedingt notwendigen weiteren Beobachtungen zu dienen. Vor allem hoffen wir, daß die in diesem Paragraphen skizzierten Überlegungen und Rechnungen den Weg klar legen, auf dem endgültige Formeln für die günstigste Nachhalldauer zu finden sind, sobald das Beobachtungsmaterial dazu ausreicht.

Breslau, Physikalisches Institut der Techn. Hochschule,  
17. Januar 1929.

---

*Anmerkung bei der Korrektur*

Erst jetzt wird uns eine Arbeit von Hrn. A. D. Fokker, Over den nagalm, Physica 4. S. 262. 1924 bekannt. Hr. Fokker kommt teilweise zu ähnlichen Resultaten wie wir, wenn auch auf ganz anderem Wege. Als Randwertaufgabe ist das Problem bei ihm nicht behandelt.

(Eingegangen 20. Januar 1929)

---

# Berechnung der Schalldichte in einem kugelförmigen Raume

Von K. Schuster

In der vorstehenden Arbeit „Über den Nachhall in geschlossenen Räumen“ von K. Schuster und E. Waetzmann wurde versucht, die Formel für die Nachhalldauer aus einer Randwertaufgabe abzuleiten. Außer dieser Formel spielt in der Raumakustik auch die Beziehung zwischen der Leistung der Schallquelle  $L$  und der sich im stationären Zustande einstellenden Energiedichte  $E_0$  eine wichtige Rolle.<sup>1)</sup> Die Formel für  $E_0$  soll an dem mathematisch einfachsten Fall abgeleitet werden, nämlich für einen kugelförmigen Raum, in dessen Zentrum sich eine punktförmige Schallquelle befindet. Der Einfachheit wegen wollen wir uns dabei nur auf radiale Schwingungen beschränken. Ist  $\varphi$  das Geschwindigkeitspotential, so ist der Momentanwert der pro Sekunde durch die Wände nach außen abwandernden Energie

$$(1) \quad L = -\rho \cdot \int \dot{\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot df,$$

wobei  $\rho$  die Dichte der Luft ist;  $df$  ist ein Oberflächenelement der Kugeloberfläche, über die das Integral zu erstrecken ist. Uns interessiert dabei nur der zeitliche Mittelwert  $\bar{L}$ . Im stationären Zustande, in dem von der Schallquelle ebensoviel Energie nachgeliefert werden muß, wie nach außen abwandert, ist  $\bar{L}$  zugleich die Leistung der Schallquelle.

Die mittlere Energiedichte  $E_0$  wird man zunächst derart zu bilden suchen, daß man den zeitlichen Mittelwert der im Kugelraum vorhandenen Gesamtenergie durch das Kugelvolumen dividiert; man wird also setzen:

$$(2) \quad E_0 = \frac{\bar{T} + \bar{U}}{V},$$

1) Vgl. die vorstehende Arbeit, Gleichung (1).

wenn  $T$  und  $U$  kinetische und potentielle Energie im Gesamtraume und  $V$  das Gesamtvolumen darstellen.  $T$  und  $U$  werden durch die Raumintegrale gegeben:

$$(3) \quad \begin{cases} T = \frac{1}{2} \rho \cdot \int \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right)^2 d\tau \\ U = \frac{1}{2} \frac{\rho}{c^2} \cdot \int \dot{\varphi}^2 d\tau, \end{cases}$$

wobei  $c$  die Schallgeschwindigkeit ist. Im Laufe der Rechnung wird sich jedoch zeigen, daß die kinetische Energie im Kugelraume unendlich groß ist, weil die Geschwindigkeit  $-\frac{\partial \varphi}{\partial r}$  an der Schallquelle selbst (für  $r = 0$ ) unendlich groß wird. Man muß daher die unmittelbare Umgebung der punktförmigen Schallquelle von der Betrachtung ausschließen, indem man um die Schallquelle eine „Sicherheitskugel“ vom Radius  $R_0$  legt. Physikalisch werden wir besser von dem Ersatz der punktförmigen Schallquelle durch eine pulsierende Kugel sprechen. Die Energiedichte  $E_0$  ist dann so zu bilden, daß die Integrale  $T$  und  $U$  nur über den Kugelschalraum zwischen  $R_0$  und  $R$  erstreckt werden und an Stelle von  $V$  das Volumen dieser Kugelschale genommen wird. Für das Geschwindigkeitspotential  $\varphi$  machen wir den Ansatz:

$$\varphi = e^{i\omega t} \cdot \psi(r)$$

$$\psi(r) = \frac{A \cdot e^{-ikr} + B \cdot e^{+ikr}}{r},$$

$\omega$  ist die vorgegebene Kreisfrequenz der Schallquelle,  $k$  die Wellenzahl  $\omega/c$ . Das Geschwindigkeitspotential stellt einfach zwei Kugelwellen, eine divergente und eine konvergente, dar.

Der akustische Widerstand an der Kugeloberfläche sei rein reell. Dann lautet die Randbedingung:

$$r = R: \quad \rho \dot{\varphi} + w \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0.$$

Daraus ergibt sich das Verhältnis  $A/B$ , wenn wir  $kR \gg 1$  annehmen zu

$$\frac{A}{B} = \frac{w + c\rho}{w - c\rho} \cdot e^{i2kR}.$$

Daraus folgt (bis auf einen konstanten Faktor):

$$(4) \quad \begin{cases} \psi = \frac{1}{r} \cdot \{(w + c \varrho) \cdot e^{+ik(R-r)} + (w - c \varrho) \cdot e^{-ik(R-r)}\} \\ = \psi_1 + i \psi_2. \end{cases}$$

Infolgedessen wird

$\varphi = M \cdot (\psi_1 \cos \omega t - \psi_2 \sin \omega t) + N \cdot (\psi_1 \sin \omega t + \psi_2 \cos \omega t)$ ,  
und es wird bis auf einen konstanten Faktor

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 &= \frac{1}{2} (\psi_1'^2 + \psi_2'^2) \\ \dot{\varphi}^2 &= \frac{1}{2} \omega^2 \cdot (\psi_1^2 + \psi_2^2) \\ \dot{\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= \frac{1}{2} \omega \cdot (\psi_1 \psi_2' - \psi_2 \psi_1'), \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \psi_1' &= \frac{d\psi_1}{dr} \\ \psi_2' &= \frac{d\psi_2}{dr} \end{aligned}$$

ist und die Querstriche die zeitliche Mittelwertbildung andeuten.

Die drei gesuchten Integrale lauten jetzt

$$\bar{L} = -\frac{1}{2} \varrho \omega F \cdot [\psi_1 \psi_2' - \psi_2 \psi_1']_{r=R}$$

$$\bar{T} = \pi \varrho \cdot \int_{R_0}^R r^2 dr \cdot (\psi_1'^2 + \psi_2'^2)$$

$$\bar{U} = \pi \varrho k^2 \cdot \int_{R_0}^R r^2 dr \cdot (\psi_1^2 + \psi_2^2),$$

wenn  $F$  die Kugeloberfläche bedeutet.

Nun ist nach Gleichung (4)

$$r^2 \psi_1'^2 = 4w^2 \cos^2 k(R-r)$$

$$r^2 \psi_2'^2 = 4(c\varrho)^2 \sin^2 k(R-r).$$

Also

$$\begin{aligned} r^2 \psi_1'^2 &= 4w^2 k^2 \sin^2 k(R-r) + \frac{4w^2 \cos^2 k(R-r)}{r^2} \\ &\quad - \frac{8w^2 k \sin k(R-r) \cdot \cos k(R-r)}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r^2 \psi_2'^2 &= 4(c\varrho)^2 k^2 \cos^2 k(R-r) + \frac{4(c\varrho)^2 \sin^2 k(R-r)}{r^2} \\ &\quad + \frac{8(c\varrho)^2 k \sin k(R-r) \cdot \cos k(R-r)}{r} \end{aligned}$$

Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \bar{L} &= 2cF \cdot w \cdot c\varrho \cdot \frac{k^2\varrho}{R^2} \\
 \bar{U} &= 2\pi\varrho k^2 \cdot (R - R_0) \cdot \left\{ w^2 \cdot \left[ 1 + \frac{\sin 2k(R - R_0)}{2k(R - R_0)} \right] \right. \\
 &\quad \left. + (c\varrho)^2 \cdot \left[ 1 - \frac{\sin 2k(R - R_0)}{2k(R - R_0)} \right] \right\} \\
 \bar{T} &= 2\pi\varrho k^2 \cdot (R - R_0) \\
 &\quad \cdot \left\{ w^2 \cdot \left[ 1 - \frac{\sin 2k(R - R_0)}{2k(R - R_0)} + \frac{2\cos^2 k(R - R_0)}{k(R - R_0) \cdot kR_0} - \frac{2}{k(R - R_0) \cdot kR} \right] \right. \\
 &\quad \left. + (c\varrho)^2 \cdot \left[ 1 + \frac{\sin 2k(R - R_0)}{2k(R - R_0)} + \frac{2\sin^2 k(R - R_0)}{k(R - R_0) \cdot kR_0} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Nehmen wir an, daß

$$k(R - R_0) \gg 1$$

und  $kR_0$  mindestens von der Größenordnung 1 ist, so wird

$$\bar{U} = \bar{T} = 2\pi\varrho k^2 \cdot (R - R_0) \cdot (w^2 + c^2\varrho^2).$$

Endlich ist

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot (R^3 - R_0^3).$$

Unter der weiteren Annahme, daß  $R_0$  gegen  $R$  zu vernachlässigen ist, wird dann

$$(6) \quad E_0 = \frac{\bar{U} + \bar{T}}{V} = 3 \cdot (w^2 + c^2\varrho^2) \cdot \frac{k^2\varrho}{R^2}.$$

Jetzt bilden wir aus Gleichung (6) und (5) das Verhältnis  $E_0/\bar{L}$ :

$$\frac{E_0}{\bar{L}} = \frac{3}{2cF} \cdot \frac{w^2 + c^2\varrho^2}{w \cdot c\varrho}.$$

Nun ist<sup>1)</sup>

$$\frac{w^2 + c^2\varrho^2}{w \cdot c\varrho} = \frac{w}{c\varrho} + \frac{c\varrho}{w} = \frac{1 \pm \sqrt{1-a}}{1 \mp \sqrt{1-a}} + \frac{1 \mp \sqrt{1-a}}{1 \pm \sqrt{1-a}} = \frac{4-2a}{a}.$$

Also wird

$$(7) \quad \frac{E_0}{\bar{L}} = \frac{6}{cF} \cdot \frac{1 - \frac{a}{2}}{a} = \frac{6}{cF} \cdot \frac{1 - \frac{a^2}{4}}{a \cdot \left(1 + \frac{a}{2}\right)} \quad 2)$$

1) Vgl. die vorstehende Arbeit Gleichung (6a) ff.

2) Vgl. auch A. D. Fokker, *Physica* 4. S. 262. 1924. Hr. Fokker hat dort die Gleichung (7) auf einem anderen Wege abgeleitet.

Nehmen wir an, daß  $a^2 \ll 1$ , so wird

$$a \cdot \left(1 + \frac{a}{2}\right) = -\ln(1 - a) = a',$$

und wir erhalten

$$(8) \quad E_0 = \frac{6 \bar{L}}{c a' F}.$$

Im § 4 der vorstehenden Arbeit war erwähnt worden, daß die Abklingezeit für die Energie in dem Kugelraum beträgt:

$$\frac{1}{2\delta} = \frac{6 V}{c a' F}.$$

Die entsprechenden Sabineschen Formeln lauten:

$$E_0 = \frac{4 \bar{L}}{c a' F}$$

$$\frac{1}{2\delta} = \frac{4 V}{c a' F}.$$

Die stationäre Schalldichte  $E_0$  und die Abklingezeit  $1/2\delta$  im Kugelraum unterscheiden sich also um den gleichen Faktor von den entsprechenden Sabineschen Ausdrücken. Das ist auch zu erwarten; denn die Energiebilanz im stationären Zustand liefert die Beziehung

$$\bar{L} = V \cdot E_0 \cdot 2\delta.$$

Breslau, Physikalisches Institut der Techn. Hochschule,  
den 17. Januar 1929.

(Eingegangen 20. Januar 1929)